Inleiding tot de Problem Solving - deel 1: Combinatorische technieken

Jan Vonk

1 oktober 2008

1 Inleiding

De basisprincipes die we in deze tekst zullen ontmoeten steken geregeld de kop op in een heel brede waaier van problemen, soms met zeer verassende toepassingen. Wie veel met wiskunde in aanraking komt of interesse heeft voor problem-solving zal vroeg of laat veel van deze principes ontmoeten, en een basisvaardigheid met de belangrijkste technieken is dan ook onontbeerlijk voor elke zichzelf respecterende problem-solver of wiskundige. De beste (en enige) manier om vlot met deze principes te leren werken is het oplossen van veel problemen.

2 Inductie

Een zeer populaire en krachtige methode kan als volgt omschreven worden:

Inductie. Veronderstel dat $S(n)$ een bewering is waarin de variabele n voorkomt, met n een positief geheel getal. Als $S(1)$ waar is, en bovendien telkens $S(k)$ waar is, ook $S(k+1)$ waar is, dan is $S(n)$ waar voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Toepassingen van dit principe duiken vaak op bij problemen die op een of andere manier een recursie bevatten. Ook identiteiten kunnen vaak heel snel bewezen worden eens je deze techniek voldoende onder de knie hebt. Zeer herkenbaar zijn de problemen echter niet steeds, en je zal soms een zeer subtiele of slimme manier moeten bedenken om tot een correct bewijs te komen.

Opwarmers

1. Bewijs dat de som van de eerste n positieve gehele getallen gegeven wordt door $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Bewijs dat $(1+2+3+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$.
3. Geef en bewijs een algemene formule voor $1+2+2^2+\ldots+2^n$
4. De fibonaccigetallen worden gegeven door $F_1 = 1, F_2 = 2$ en voor $n > 2$ is $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$. Toon aan dat $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^{n+1}$.
5. Toon aan dat $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_nF_{n+1}$.

6. We maken een rij van natuurlijke getallen $a_1, a_2, \ldots$ die gedefinieerd worden door de recursieformule

$$a_1 = 1,\ a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}),\ n > 1.$$

   Zoek de waarde van a_{1997}.

Uitdagingen

1. Definieer $a_0 = 1$ an stel $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotoon stijgend is en dat ze naar boven begrensd is.
2. Toon aan dat $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i2^i = (k-1)2^{k+1} + 2$.
3. Toon aan dat $3^{n+1} \mid 2^{3^n} + 1$ voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.
4. Zij n een positief geheel getal. Elk punt (x, y) in het vlak, met x en y nietnegatieve gehele getallen met $x + y \leq n$, wordt gekleurd in rood of blauw, volgens de volgende regel: Als een punt (x, y) rood is, dan is ook elk punt (x', y') met $x' \leq x$ en $y' \leq y$ rood. Zij A het aantal manieren om n blauwe punten te kiezen met verschillende $x-$coördinaten, en zij B het aantal manieren om n blauwe punten te kiezen met verschillende $y-$coördinaten. Bewijs dat $A = B$.
5. Zij $\mathcal{P}$ een verzameling van $n \geq 3$ punten in het vlak, niet allemaal collineair. Bewijs dat de verzameling van rechten door ten minste 2 punten van $\mathcal{P}$ minstens n elementen bevat.

3 Het duivenhokprincipe

Dit principe, dat zo eenvoudig is en toch verassend diepe toepassingen kan hebben, heeft misschien geen introductie nodig aangezien het in vele cursussen aan bod komt. Het basisidee zal door vrijwel iedereen als voor de hand liggend gezien worden, en toch is het een krachtig hulpmiddel in vele problemen. De toepassingen zijn legio, en vlot kunnen werken met deze techniek is werkelijk essentieel.

Figuur 1: Duivenhokken

Men zou het duivenhokprincipe als volgt kunnen verwoorden:
Zijn n en k natuurlijke getallen. Als men n duiven verdeelt over k hokken, dan bestaat er een hok waarin minstens $\left[\frac{n-1}{k}\right]+1$ duiven zitten.

De kracht van dit eenvoudige principe blijkt uit de vele toepassingen, in combinatoriek, maar ook in algebra, getaltheorie en zelfs meetkunde. We illustreren het gebruik van deze techniek met een voorbeeld:

Voorbeeld. Bewijs dat elke deelverzameling met 55 elementen van $\mathcal{S} = \{1, 2, ..., 100\}$ twee getallen bevat waarvan het (positieve) verschil gelijk is aan 9.

Bewijs. Neem een deelverzameling $\mathcal{A}$ met $|\mathcal{A}| = 55$ en noem $a_1 < a_2 < ... < a_{55}$ de elementen van $\mathcal{A}$. We definiren vervolgens $b_i := a_i + 9$. Er geldt uiteraard dat $a_i \leq 100$, dus er volgt dat $b_i \leq 109$. We hebben nu 55 a_i's en 55 b_i's, wat een totaal maakt van 110 getallen, allen niet groter dan 109. Hieruit volgt wegens het duivenhokprincipe dat er twee gelijk moeten zijn. □

Voorbeeld. Bewijs dat elke verzameling van 13 reële getallen twee getallen a en b bevat zodat

$$0 \leq \frac{a-b}{1+ab} \leq 2-\sqrt{3}$$

Oplossing. Zij $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \ldots, s_{13}\}$ de gegeven verzameling en stel $t_i = \arctan s_i$ voor $i = 1, 2, ..., 13$. Dan geldt voor $i = 1, 2, \ldots, 13$ dat $t_i \in [-\pi/2, \pi/2]$. We verdelen het interval $[-\pi/2, \pi/2]$ in twaalf deelintervallen van gelijke lengte, namelijk de intervallen $[k\pi/12, (k+1)\pi/12]$ voor $k = -6, -5, ..., 5$. Omdat er 13 getallen t_i gegeven zijn zullen twee getallen tot hetzelfde interval behoren. Er bestaan met andere woorden indices p en q zodat $0 \leq t_p - t_q \leq \pi/12$. Omdat de tangensfunctie stijgend is in het interval $]-\pi/2, \pi/2[$ geldt er dat $0 \leq \tan(t_p - t_q) \leq \tan(\pi/12)$. Merk nu op dat $\tan(\pi/12) = 2-\sqrt{3}$ en dat

$$\tan(t_p - t_q) = \frac{\tan t_p - \tan t_q}{1 + \tan t_p \cdot \tan t_p} = \frac{s_p - s_q}{1 + s_p \cdot s_q}$$

Stel nu $a = s_p$ en $b = s_q$, en het gestelde volgt. □

Opwarmers

1. Gegeven 7 verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 11. Bewijs dat twee getallen hiervan een som 12 hebben.

2. Worden er 5 punten in een gelijkzijdige driehoek met zijde 2 geplaatst, dan zijn er steeds 2 punten te vinden waartussen de afstand kleiner dan of gelijk aan 1 is.

3. Wat is het maximum aantal lopers dat je op een 8×8 schaakbord kan zetten zodat geen enkele loper een andere loper kan slaan?

4. Gegeven 7 gehele getallen. Toon aan dat er een koppel is zodat het verschil van de kwadraten van die 2 getallen deelbaar is door 10.

5. In een groep van $n \geq 2$ mensen zijn er steeds 2 mensen die exact evenveel vrienden hebben binnen de groep. (Vriendschap is wederkerig)

6. Bewijs dat elk veelvlak twee zijvlakken heeft die begrensd worden door een gelijk aantal zijden.
7. Kies 20 natuurlijke getallen kleiner dan 70. Bewijs dat er onder de paarsgewijze verschillen minstens 4 dezelfde getallen zijn.
8. Bewijs dat voor een gegeven n die geen veelvoud is van 2 of 5, er een veelvoud van n bestaat dat enkel uit 1'tjes bestaat in decimale voorstelling.
9. Bewijs dat er een getal N van de vorm 20042004...2004 bestaat zodat
   - N deelbaar is door 2003.
   - N niet meer dan 10000 cijfers heeft in decimale voorstelling.
10. De hoekpunten van een regelmatige 7-hoek worden ofwel in zwart ofwel in wit gekleurd. Bewijs dat er drie punten met dezelfde kleur bestaan die een gelijkbenige driehoek vormen.
11. Zijn $a_1, a_2, ..., a_n$ niet noodzakelijk verschillende natuurlijke getallen. Bewijs dat er een deelverzameling bestaat van deze getallen met een som deelbaar door n.

Uitdagingen

1. Een schaakmeester heeft 77 dagen om zich voor te bereiden op een toernooi. Hij wil minstens 1 spel per dag spelen, maar niet meer dan 132 spelletjes. Bewijs dat er een opeenvolging van dagen is waarin hij exact 21 spelletjes speelt.
2. Zij $\mathcal{R}$ een deelverzameling van $\mathcal{S} = \{1, 2, ..., 2n\}$ zodat $|\mathcal{R}| = n + 1$. Bewijs dat $\mathcal{R}$ twee elementen a en b bevat zodat a een deler is van b.
3. Bewijs dat er voor elke n een Fibonacci-getal is dat eindigt op n nullen.
4. Gegeven is een rechthoekig rooster van punten met 13 rijen en 13 kolommen. Men kleurt 53 van de 169 punten rood. Bewijs dat er een rechthoek bestaat waarvan de zijden evenwijdig zijn aan de randen van het rooster en waarvan alle hoekpunten rode roosterpunten zijn.
5. Zij n een oneven natuurlijk getal groter dan 1 en zijn $c_1, c_2, ..., c_n$ natuurlijke getallen. Voor elke permutatie $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ van $\{1, 2, ..., n\}$ definieert men $S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$. Bewijs dat er twee permutaties $a \neq b$ bestaan zodat $n!$ een deler is van $S(a) - S(b)$.
6. Zij $\mathcal{A}$ een deelverzameling van $\mathcal{S} = \{1, 2, ..., 1000000\}$ met 101 elementen. Bewijs dat er getallen $t_1, t_2, ..., t_n$ bestaan in $\mathcal{S}$ zodat de verzamelingen
$$\mathcal{A}_j = \{x + t_j | x \in \mathcal{A}\}$$
twee aan twee disjunct zijn.
7. Zij $\mathbb{P}$ de verzameling priemgetallen, en zij $\mathcal{M}$ een deelverzameling van $\mathbb{P}$ met minstens 3 elementen, zodat voor elke eigenlijke deelverzameling $\mathcal{A}$ van $\mathcal{M}$ elke priemdeler van $-1 + \prod_{p \in \mathcal{A}} p$ in $\mathcal{M}$ zit. Bewijs dat $\mathcal{M} = \mathbb{P}$.
8. Aan een wiskundecompetitie nemen 21 jongens en 21 meisjes deel. Achteraf bleek dat

- elke deelnemer hoogstens 6 problemen oploste.
- voor elk paar bestaande uit een jongen en een meisje, er minstens 1 probleem is dat door allebei werd opgelost.

Bewijs dat er een probleem bestaat dat opgelost werd door minstens 3 jongens en minstens 3 meisjes.

4 Invarianten

Problemen die met deze techniek op te lossen zijn, zijn vaak goed herkenbaar. Wanneer in een probleem een bepaald algoritme wordt uitgevoerd, is het vaak een goede strategie om op zoek te gaan naar invarianten, dingen die niet veranderen gedurende de verschillende stappen van het algoritme. Als er met andere woorden herhaling is van een bepaalde stap, zoek dan steeds naar een invariant. Eens een goede invariant gevonden werd, kan men antwoorden op vragen als "Kan een gegeven eindtoestand bereikt worden?" of "Zoek alle mogelijke eindtoestanden".

Voorbeeld. Op een schoolbord schrijven we de getallen 1 tot en met 99. Je kiest telkens twee getallen, en vervangt ze door hun verschil. Bewijs dat het overblijvende getal even is.

Bewijs. Bij elke stap zijn er 3 mogelijkheden:

- We kiezen twee even getallen: ze worden vervangen door een even getal.
- We kiezen een even en een oneven getal: ze worden vervangen door een oneven getal.
- We kiezen twee oneven getallen: ze worden vervangen door een even getal.

Merk op dat het aantal oneven getallen telkens ofwel constant blijft, ofwel met 2 vermindert. De pariteit van het aantal oneven getallen op het bord is dus een invariant en is dus na elke stap hetzelfde gebleven. Aangezien dat aantal in het begin even is, moet dat ook zo zijn in de eindtoestand. Het laatste getal kan met andere woorden geen oneven getal zijn, hetgeen we wilden bewijzen. □

Problemen

1. Begin met de verzameling $\mathcal{S} = \{3, 4, 12\}$. Een stap bestaat uit het kiezen van 2 getallen a en b uit $\mathcal{S}$ en het vervangen van a en b door $\frac{3a}{5} - \frac{4b}{5}$ en $\frac{4a}{5} + \frac{3a}{5}$. Kan je ooit de toestand $\mathcal{S} = \{4, 6, 12\}$ bereiken?

2. Men schrijft het getal -1 bij een van de hoekpunten van een kubus, en bij alle andere hoekpunten schrijft men 1. kies telkens een ribbe van de kubus en verhoog of verlaag de getallen bij de 2 aanliggende hoekpunten met 1. Kan je de toestand bereiken waarin het getal 1 bij elk hoekpunt staat?

3. In het begin van een spel worden de getallen $1, 2, \ldots, 2008$ op een bord geschreven. Een zet bestaat uit

   - het selecteren van een aantal getallen op het bord.
   - het berekenen van de rest bij deling van de som van de geselecteerde getallen door 11.

- het opschrijven van deze uitkomst op het bord.
- het verwijderen van de geselecteerde getallen.

In dit spel staan uiteindelijk nog maar 2 getallen op het bord. Een ervan is 1000, wat is het andere?

4. Tien dwergen zitten aan een ronde tafel. In het begin heeft 1 van hen 10 goudstukken. Elke minuut gaan de dwergen na wie van hen meer dan 1 goudstuk heeft. Als er zo iemand is, dan geeft precies 1 van deze dwergen 1 goudstuk aan elk van zijn buren. Bewijs dat er nooit een tijdstip zal zijn waarop de dwergen elk 1 goudstuk hebben.

5. Een draak heeft 100 hoofden. Een ridder kan 15, 17, 20 of 5 hoofden afhakken, maar als hij dat doet komen er respectievelijk 24, 2, 14 en 17 nieuwe hoofden bijgroeien op zijn schouders. Indien alle hoofden afgehakt zijn, sterft de draak. Kan de draak sterven?

6. Rond een cirkel staan 5 enen en 4 nullen geranschikt, in willekeurige volgorde. Elke stap schrijf je tussen twee dezelfde getallen een 0, en tussen twee verschillende getallen een 1. De originele getallen veeg je weg. Kan je na een aantal stappen in de situatie verzeild raken waarin alle getallen 0 zijn? Veralgemeen.

7. Elke term in de rij $1, 0, 1, 0, 1, 0, ...$ vanaf de zevende term is de som van de vorige zes modulo 10. Bewijs dat het patroon $..., 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...$ nooit voorkomt.

5 Kleuringen

Soms kan het nuttig zijn om gebruik te maken van kleuringen om de onmogelijkheid van een bepaalde handeling te bewijzen. Een eenvoudig voorbeeld is het volgende:

Voorbeeld. Men beschikt over een schaakbord met 64 vakjes, waaruit we de twee vakjes van twee diametraal tegengestelde hoeken uitzagen. Op hoeveel manieren kan je dit bijgezaagde schaakbord bedekken met 31 dominosteentjes?

Oplossing. Enkele moedige pogingen zouden nergens op uitdraaien, want het blijkt onmogelijk te zijn zo'n schaakbord met 31 dominosteentjes te bedekken. Immers, elk dominosteentje bedekt 1 zwart en 1 wit vakje, terwijl het bijgezaagde schaakbord 30 vakjes van een kleur heeft, en 32 vakjes van de andere kleur.

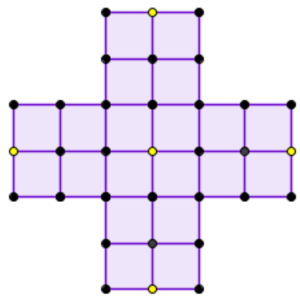
Problemen

1. Een vierkant van 7×7 is bedekt met 16 tegeltjes met afmeting 3×1 en een enkel 1×1 tegeltje. Wat zijn de mogelijke posities van dat ene tegeltje?

2. Toon aan dat een 4×9 rechthoekig bord niet overdekt kan worden door 9 L-vormige tetris stukjes.

3. Een rechthoekige vloer wordt bedekt door een aantal 2×2 en 1×4 tegels. Een tegel van de ene soort breekt, maar er is een tegel beschikbaar van de andere soort. Kan de vloer nog steeds bedekt worden?

4. Het spelletje *solitaire* wordt gespeeld op een speelveld zoals in onderstaande figuur.



Figuur 2: Het spelbord van solitaire

Het bord is zo gemaakt dat je een knikker kan leggen op de roosterpunten van het spelbord. Men begint met op elk kruispunt een knikker te leggen, met uitzondering van het centrale roosterpunt, dat leeg blijft. Een zet bestaat uit het springen van een knikker over een naburige knikker, wanneer het achterliggende vakje leeg is. De knikker waar over werd gesprongen wordt weggenomen van het bord.

Het doel van dit spel is om te eindigen met 1 knikker op het centrale roosterpunt. Toon aan dat de laatste knikker enkel op een van de aangeduide plaatsen kan liggen.

5. Is er een manier om 250 $1 \times 1 \times 4$ tegeltjes in een doos van $10 \times 10 \times 10$ te verpakken?

6. Alle punten in het vlak worden blauw of rood gekleurd. Zij x een willekeurig reëel getal. Bewijs dat er steeds twee punten van dezelfde kleur gevonden kunnen worden die op afstand 1 van elkaar staan.

7. Gegeven een $4 \times n$ schaakbord. Bewijs dat het onmogelijk is om een paard sprongen te laten maken zodat hij op elk vakje juist 1 keer komt en terugkeert naar zijn beginpositie.

6 Het extremaalprincipe

Een goede reflex bij het oplossen van problemen die je best aankweekt is het zogenaamde extremaalprincipe toepassen. Als je ooit om een of andere reden het niet bestaan van bepaalde objecten wil aantonen, bijvoorbeeld van het maximum van een verzameling, zal deze techniek zeker een nuttig hulpmiddel zijn. Een voorbeeld zal allicht veel verduidelijken:

Probleem. Er staan n mensen in een veld, elk op een verschillende afstand van elkaar. Iedere persoon heeft een geladen pistool en richt dit naar de persoon die het dichtste bij hem staat. Dan schieten ze allemaal op hetzelfde ogenblik. Bewijs dat er steeds iemand in leven blijft als n oneven is.

Oplossing. Beschouw de twee mensen die op de kleinst mogelijke afstand van elkaar staan. Deze twee mensen schieten uiteraard op elkaar. Stel dat geen van beiden doelwit is van de overige $n-2$ mensen in het veld, dan laten we deze twee mensen buiten beschouwing, en kijken we naar de $n-2$ overige mensen. Zo verminderen we stap voor stap het aantal mensen met 2, tot we plots een tweetal A en B krijgen waarvan persoon A ook het doelwit is van een van de overige mensen. Deze stap moet voorkomen, aangezien n oneven is, en we door telkens te verminderen met 2 nooit 0 kunnen bereiken. In dat geval zullen twee kogels persoon A treffen, en zal er dus zeker iemand zijn die geen kogels ontvangt.

Probleem. Gegeven zijn n boerderijen en n waterputten die over het vlak verspreid zijn. Het is de bedoeling om een rechte weg van elke boerderij naar juist 1 waterput aan te leggen. Bewijs dat de waterputten bijectief aan de boerderijen kunnen toegewezen worden, zodat geen twee wegen elkaar snijden. (Er zijn nooit 3 objecten die op dezelfde rechte liggen.)

Oplossing. Onder alle $n!$ wegennetten beschouwen we het exemplaar met de kleinste som der lengtes van alle wegen. Stel dat in deze bijectie twee wegen elkaar snijden (Noem ze B_iW_m en B_jW_n): Vervangen we deze twee snijdende wegen door B_iW_n en B_jW_m, dan verkrijgen we een weggennet dat een kleinere totale lengte heeft door de driehoeksongelijkheid, contradictie. Het beschouwde wegennet heeft dus geen snijdende wegen.

Problemen

1. Elk roosterpunt van een $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ rooster krijgt een natuurlijk getal toegekend. Elk van die getallen is het rekenkundig gemiddelde van zijn 4 buren. Toon aan dat alle getallen gelijk zijn.

2. In een groep van n personen zijn er steeds twee die binnen deze groep evenveel vrienden hebben. (Vriendschap is wederkerig verondersteld)

3. Toon aan dat het product van n opeenvolgende natuurlijke getallen steeds deelbaar is door $n!$.

4. Zoek alle mogelijke waarden van n als gegeven is dat

   - $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ met p_i een priemgetal en $p_i \neq p_j$ voor $i \neq j$.
   - voor elk priemgetal p geldt dat $p \mid n \iff p-1 \mid n$.

5. Los de vergelijking $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ op in gehele getallen.
6. Zoek alle reële oplossingen van $(x + y)^3 = z,\ (x + z)^3 = y,\ (y + z)^3 = x$.
7. Op een feest heeft elke gast hoogstens 3 vijanden. Bewijs dat we de groep in twee kamers kunnen plaatsen zodat iedereen hoogstens 1 vijand heeft in zijn eigen kamer.
8. Zes cirkels hebben een gemeenschappelijk punt. Bewijs dat er steeds een cirkel is die het middelpunt van een andere cirkel in zijn inwendige heeft.
9. Elke doorsnede van een ruimtefiguur met een vlak is een cirkel. Bewijs dat deze figuur een bol is.
10. In elke configuratie van n punten in het vlak, niet allemaal collineair, bestaat er een rechte die exact twee van de gegeven punten bevat.
11. Van $2n + 3$ punten in het vlak zijn er geen 3 collineair, en liggen er geen 4 op een cirkel. Bewijs dat we 3 punten kunnen kiezen zodat de cirkel door deze 3 punten zodat er exact n punten binnen, en n punten buiten de cirkel liggen.