

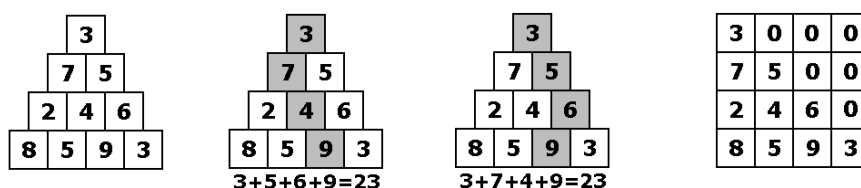
PRIME Coma 2008

Universiteit Gent

26 november 2008

1 Padsommen (5 punten)

Stel, je hebt een piramide met getallen, zoals op onderstaande figuur. Vertrek vanuit de bovenste blok en daal telkens af naar één van de twee blokken eronder, tot je beneden bent. Zo krijg je een *pad*. We noemen de *padsom* van dat pad de som van alle getallen die je zo bent tegengekomen. De *maximale padsom* is dan de grootste padsom onder alle paden. Op de piramide hieronder is de maximale som bijvoorbeeld 23, en er zijn twee paden die 23 als padsom hebben.



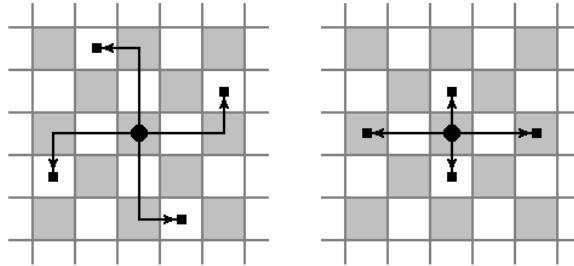
Zoals de laatste tekening uit bovenstaande rij toont, kun je zo'n piramide gemakkelijk als benedendriehoeksmatrix opslaan, en zoals je nog weet uit het voorbeeldprobleem kun je met onderstaand scriptje (met n de hoogte van de piramide, dus de dimensie van de matrix) meteen de maximale padsom bepalen, deze is 746138.

```
for i from 2 to n do
  A[i,1]:=A[i,1]+A[i-1,1];
  for j from 2 to i do
    A[i,j]:=A[i,j]+max(A[i-1,j-1],A[i-1,j]);
  end do;
end do;
maximum = max(seq(A[n,i],i=1..n));
```

Maar dat stelt ons jammergenoeg niet in staat om het pad zelf te vinden - zoals de tekening hierboven illustreert is het pad zelfs niet noodzakelijk uniek. In de bijgevoegde piramide is het maximale pad wel uniek. Wat is het 42ste element op dat pad (waarbij 1 de top is en 100 de bodem)?

2 Nieuwe schaakstukken (5 punten)

De klassieke schaakstukken zijn zonder twijfel iedereen bekend. Maar ook met schaakstukken die niet in de klassieke schaakset zitten kun je leuke dingen doen. Hieronder staan twee zo'n stukken afgebeeld, met hun mogelijke zetten (naar precies 4 andere vakjes).

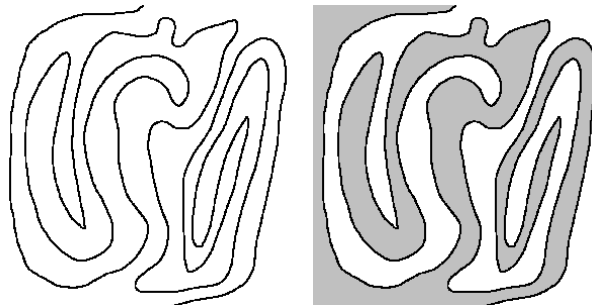


Op een 9999×9999 schaakbord mogen beide stukken nu elk een aantal zetten doen, waarbij het toegelaten is dat beide stukken plots op hetzelfde vakje komen te staan.

Als je beide stukken op het middenste vakje laat beginnen, voor hoeveel vakjes geldt dan dat het mogelijk is dat beide stukken na 2008 zetten precies op dat vakje staan?

3 Kronkelige rivier (5 punten)

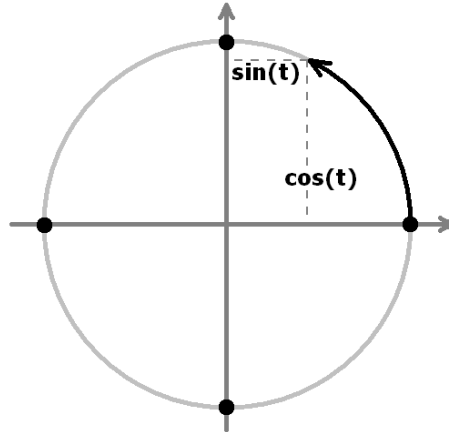
In onderstaande tekening staat een kronkelige rivier afgebeeld. Bijgeleverd vind je een 300×300 matrix met daarin een zwart-witte pixelvoorstelling van de tekening: 1 staat voor een zwarte pixel (rivier), 0 staat voor een witte pixel (land). Als de rivier langsonder binnenstroomt en langsboven weer buiten, bepaal dan de oppervlakte (in pixels) van de linkeroever op de tekening, dit is het grijs gearceerde gebied op de tweede tekening.



Je mag er hierbij vanuit gaan dat de rivier meerdere pixels dik is, en dat beide oevers (evenals de rivier zelf) samenhangend zijn (je kunt elke twee punten met een aaneenschakeling van lijnstukken verbinden zonder de oever te verlaten).

4 Kwantummechanica (5 punten)

Een deeltje leeft op de eenheidscirkel, zijn positie kan dus op ieder tijdstip geschreven worden als $(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$. Een ‘meting’ bestaat erin het deeltje willekeurig naar één van de twee assen te verplaatsen, meerbepaald willekeurig naar één van de twee dichtstbijzijnde bollen. Als het punt precies op een bol zit dan blijft het op die bol.



De kans op positie $(\cos \theta, \sin \theta)$ om naar de dichtstbijzijnde bol op de horizontale as te gaan is op ieder tijdstip $\cos^2 \theta$, die om naar de dichtstbijzijnde bol op de verticale as te gaan $\sin^2 \theta$. We herhalen nu, startend vanop het punt $(1, 0)$, precies 2008 keer het volgende experiment: “draai 1 radiaal tegenwijzerzin, voer dan een meting uit”.

Na 1 meting heb je dus $\cos^2(1) \approx 0.2919265818$ kans om op de horizontale as te zitten, en $\sin^2(1) \approx 0.7080734183$ om op de verticale as te zitten. Na 2008 keer zal die kans ‘ongeveer’ $\frac{1}{2}$ zijn, maar niet exact. De kans om op de horizontale/verticale as te zitten is $\frac{1}{2} \pm \varepsilon$. Gevraagd is deze ε te bepalen, in wetenschappelijke notatie met 4 beduidende cijfers, dus van de vorm $w,xyz \cdot 10^{-\alpha}$ met w, x, y, z cijfers ($w \neq 0$) en $\alpha \geq 1$ een natuurlijk getal.