

PRIME Puma 2009: opgaven

Gent, 23 maart 2009

De competitie bevat zes vragen, die elk op evenveel punten staan. Binnen elke vraag staan alle onderdelen op (ongeveer) evenveel punten. Je krijgt 150 minuten de tijd om zoveel mogelijk vragen en onderdelen op te lossen. Handboeken, rekenmachines, gsm's en andere hulpmiddelen zijn hierbij niet toegestaan, enkel pen en papier mogen gebruikt worden.

1 Drie eigenschappen

Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie. Zijn onderstaande¹ uitspraken waar of vals? Bewijs de correcte en geef een tegenvoorbeeld voor de valse.

- (a) Als f injectief en surjectief is, dan is f strikt monotoon.
- (b) Als f surjectief en strikt monotoon is, dan is f injectief.
- (c) Als f injectief en strikt monotoon is, dan is f surjectief.

2 Drugs op school

Op een school zitten 2009 studenten, elke twee studenten zijn ofwel bevriend met elkaar, ofwel niet bevriend met elkaar. Een drugshandelaar wil nu enkele studenten omkopen om op die school te dealen. Hij wil dit zodanig doen dat twee dealers nooit bevriend zijn met elkaar, maar wel iedere niet-dealende student bevriend is met minstens één dealer. Toon aan dat als hij zijn dealers goed kiest (en iedereen omkoopbaar is), dit altijd mogelijk is, ongeacht wie er juist met wie bevriend is.

3 Driedubbele functie

Bestaat er een continue functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zodanig dat voor elke $a \in \mathbb{R}$ de vergelijking $f(x) = a$ precies drie verschillende reële oplossingen heeft?

¹Een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is strikt monotoon wanneer f ofwel strikt stijgend ($\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : (x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$), ofwel strikt dalend ($\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : (x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$) is.

4 Fixrechte

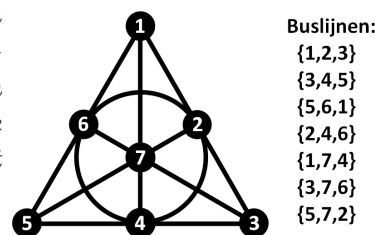
- (a) Zij $V = \mathbb{R}^{2008}$ en zij A een niet-singuliere 2008×2008 matrix. Bestaat er noodzakelijk een rechte door de oorsprong² die door A op zichzelf afgebeeld wordt?
- (b) Zij $V = \mathbb{R}^{2009}$ en zij A een niet-singuliere 2009×2009 matrix. Bestaat er noodzakelijk een rechte door de oorsprong die door A op zichzelf afgebeeld wordt?

5 Politie op de bus

In Projectivistan liggen een aantal bushaltes, en door elk van die haltes lopen meerdere buslijnen. Elke buslijn heeft precies 9 haltes, en voor elke twee bushaltes is er precies één buslijn die in beide stopt. Bovendien hebben elke twee buslijnen precies één halte gemeen. Door recente incidenten wil de politie vaste agenten plaatsen om de veiligheid te verhogen. Ze plaatst in 10 bushaltes een agent, op zodanige wijze dat er nooit drie agenten op dezelfde buslijn staan.

- (a) Toon aan dat er door elke halte precies 9 buslijnen gaan.
- (b) Startend in een willekeurige halte zonder agent, op hoeveel buslijnen door die halte staan twee agenten? Eén agent? Geen agenten?
- (c) Als er al negen agenten geplaatst zijn, met geen drie agenten op eenzelfde buslijn, toon aan dat er dan altijd een halte is waar men de tiende kan plaatsen zonder drie agenten op dezelfde buslijn te hebben.

Een iets kleinere variant, met 3 haltes per buslijn en 4 agenten, kan gevonden worden in het PRIME-logo. Plaatsen we agenten op haltes 1, 3, 5, 7 dan lopen door elke halte waarop geen agent staat, twee lijnen met twee agenten, nul lijnen met één agent en één lijn met nul agenten.



6 Loterij

De loterij van Decimalië geeft formulieren uit waarop je 10 cijfers kan invullen (bv. 0000000000 of 0123456789 of 9486344992). Je “wint” de lotto zodra je een lotje hebt dat minstens twee cijfers juist heeft. Vind een combinatie van 14 invulmogelijkheden, zodat als je deze invult je met zekerheid minstens éénmaal “wint”.

²In een reële vectorruimte V noemen we $\mathbb{R}\vec{v} = \{c\vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$ de rechte opgespannen door de vector $\vec{v}$. De rechten $\mathbb{R}\vec{v}$ met $\vec{v} \in V$ zijn meetkundig gezien dus precies de rechten door de oorsprong. Als A een matrix is die op V inwerkt, dan zeggen we dat A de rechte $\mathbb{R}\vec{v}$ afbeeldt op de rechte $\mathbb{R}(A\vec{v})$.