Oplossingen COMA 2011

Een foutloos parcours ($\sqrt{2}$ punten)

Stel dat COMA 2012 uit 100 vragen zou bestaan met een puntentelling zoals dit jaar, wat is dan de maximale score die een deelnemer kan behalen?

Antwoord:
We rekenen dit gewoon uit:

```
sum([sqrt(RR(nth_prime(n))) for n in [1..100]])
```

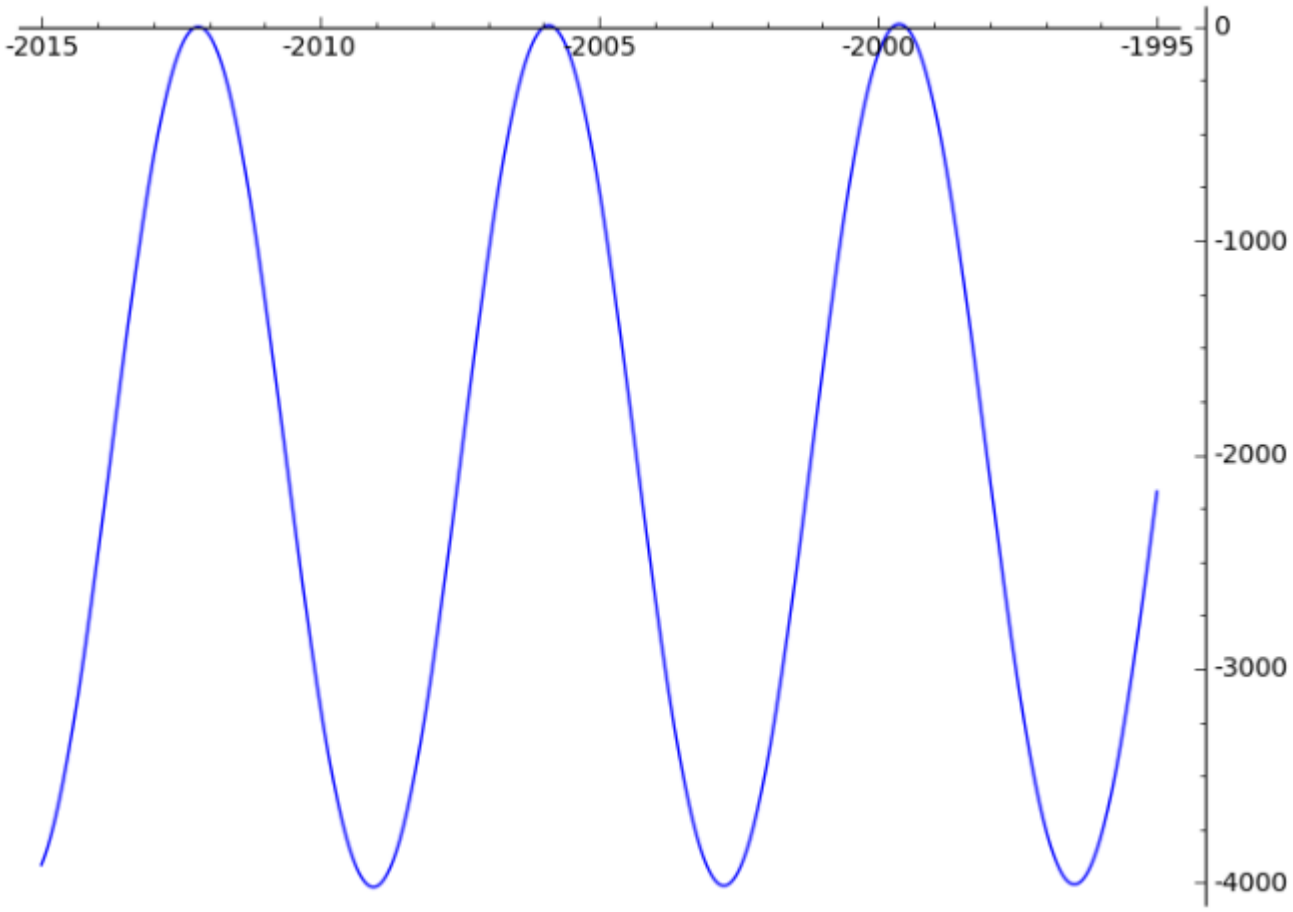
```
1434.64480185458
```

Een wispelturige functie ($\sqrt{3}$ punten)

Wat is de kleinste oplossing van $2011 \cdot \sin(x) = x$?

Antwoord:
We weten zeker dat het nulpunt bereikt wordt voor $x \geq -2011$, want $\max(\sin) = 1$, en we verwachten dat het grootste nulpunt niet veel groter is dan -2011. We kunnen bijvoorbeeld door een grafiek te bekijken vaststellen dat het nulpunt tussen -2010 en 2005 ligt. Vervolgens kunnen we het nulpunt in dit interval numeriek bepalen. We moeten natuurlijk opletten dat we de juiste oplossing nemen, want er zijn er twee die vrij dicht bij elkaar liggen.

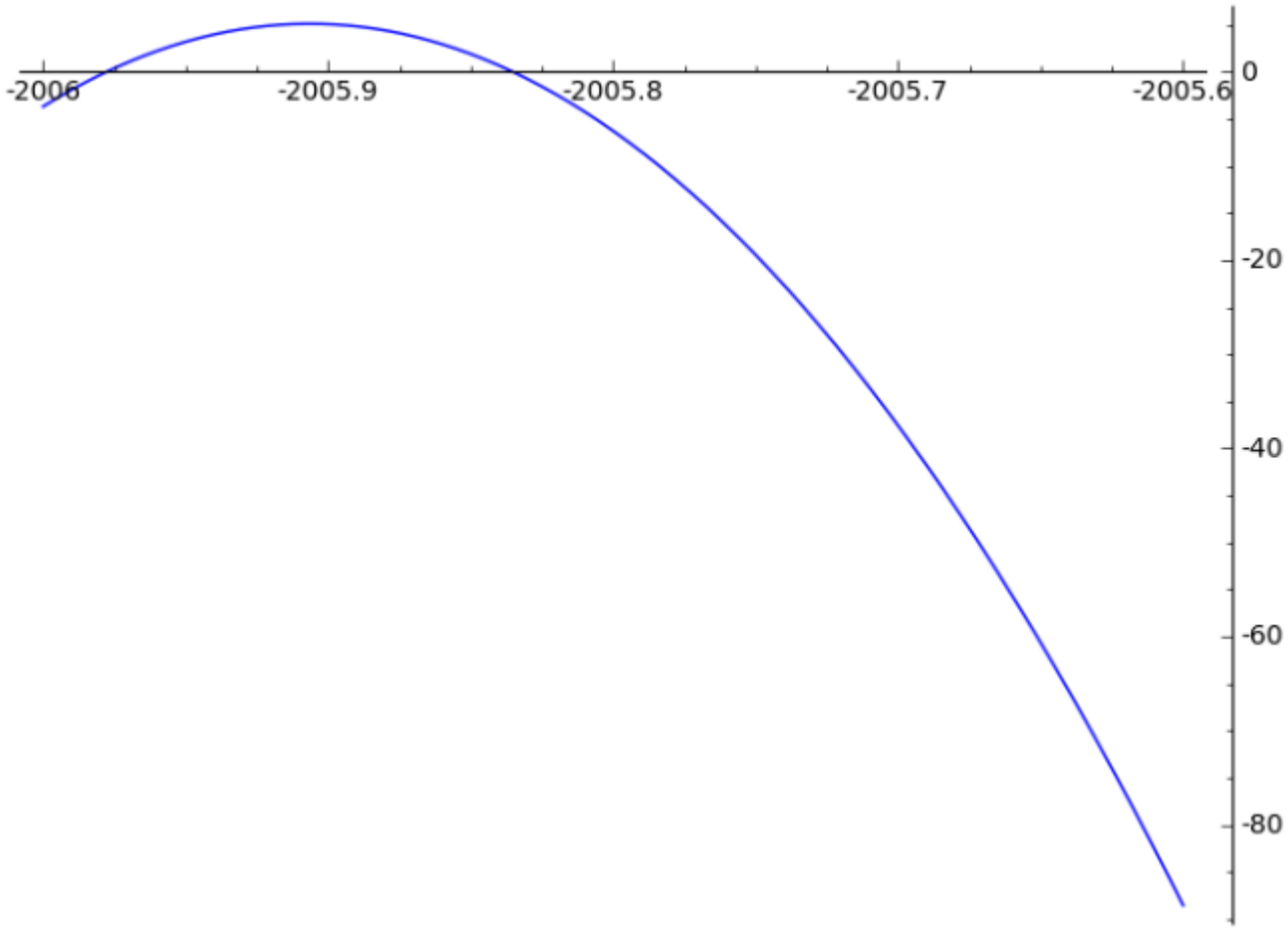
```
f(x)=x-2011*sin(x)
plot(f,(-2015,-1995))
```




```
find_root(f,-2010,-2005)
```

```
-2005.8352244172713
```

```
plot(f,(-2006,-2005.6))
```



De oplossing die we zoeken is dus:

```
find_root(f,-2006,-2005.9)
```

```
-2005.9775988462893
```

Hoe ver durven ze gaan? ($\sqrt{5}$ punten)

Beschouw de kromme met parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(2\pi t) + 2\cos(8\pi t) \\ y(t) = 3\sin(2\pi t) + 2\sin(8\pi t) \end{cases}.$$

Wat is de maximale afstand tussen 2 punten op deze kromme?

Antwoord:

We lossen dit probleem op door eerst het maximum langs onder af te schatten. Vervolgens kijken we waar er waarden van de afstandsfunctie boven deze schatter liggen. Op die plaatsten gaan we herhaaldelijk 'inzoomen' om een goede benadering van onze oplossing te krijgen.

```
x(t) = 3* cos(2*pi*t) + 2* cos(8*pi*t)
y(t) = 3* sin(2*pi*t) + 2 *sin(8*pi*t)
d(u,v)=(x(u)-x(v))^2+(y(u)-y(v))^2
n=50
L=[]
for A in [0..n]:
```

```
    a=A/n
    for B in [A..n]:
        b=B/n
        L+=[(d(a,b).n(100))]
C=[]
M=max(L)
n=100
L=[]
for A in [0..n]:
    a=A/n
    for B in [A..n]:
        b=B/n
        val=(d(a,b).n(100))
        if(val>=M):
            L+=[val]
            C+=[[A,B]]
while n<=10000000000:
    old_n=n
    n=n*4
    rat=n/old_n
    M=max(L)
    L=[]
    old_C=C
    C=[]
    for AB in old_C:
        for A in [floor((AB[0]-1/2)*rat)..ceil((AB[0]+1/2)*rat)]:
            a=A/n
            for B in [floor((AB[1]-1/2)*rat)..ceil((AB[1]+1/2)*rat)]:
                b=B/n
                val=d(a,b).n(100)
                if(val>=M):
                    L+=[val]
                    C+=[[A,B]]
```

Van het maximum dat we nu geschat hebben moeten we nu nog de vierkantswortel trekken. De oplossing volgt.

```
sqrt(max(L))
```

```
9.581219560265908215268292762 9
```

Men kan de oplossing voor een groot stuk ook symbolisch uitrekenen. Omdat het een redelijke lange berekening is, gaan we dit hier niet doen. Maar men kan aantonen dat de maximale afstand gelijk is aan het grootste nulpunt van de veelterm

```
R.<y> = PolynomialRing(QQ)
pol3 = 262144*y^8 - 36831232*y^6 + 1242009600*y^4 - 6526474375*y^2 +
8801237500
pol3
```

```
262144*y^8 - 36831232*y^6 + 1242009600*y^4 - 6526474375*y^2 +
8801237500
```

```
pol3.roots(ring=RealField(128), multiplicities=False)[-1]
```

```
9.581219560265908215437529356973719926 4
```

f na f en daarna nog een enkele keren f ($\sqrt{7}$ punten)

Zij

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} : x \to \pi \cdot \cos(x)$$

Wat is de kleinste waarde waarvoor f^{2011} (f 2011 keer met zichzelf samengesteld) haar maximum bereikt?

Antwoord:

We definieren $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} : x \to \arccos(x/\pi)$. We weten dat f gemaximeerd wordt door 0, en f^2 dus door $g(0)$ en $-g(0)$ en f^3 door $g(g(0)), g(-g(0)), -g(g(0))$ en $-g(-g(0))$ zo verdergaand kunnen we de 2^{2010} waarden die f^{2011} maximeren. g is een dalende functie, we moeten $-g$ uitgerekend is het kleinst mogelijke argument uit de vorige stap hebben. We definieren nu een recursieve methode zodanig dat de kleinste waarde altijd op de laatste plaats staat.

```
RR=RealField(124)
```

```
def g(stap,k):
    if(stap==1):
        return RR(0)
    else:
        return RR(arccos(g(stap-1,floor(k/2))/pi)*(-1)^k)
```

```
sys.setrecursionlimit(50000)
```

```
g(2011,2^2010-1)
```

```
-2.4813323828635225692630193362549047 94
```

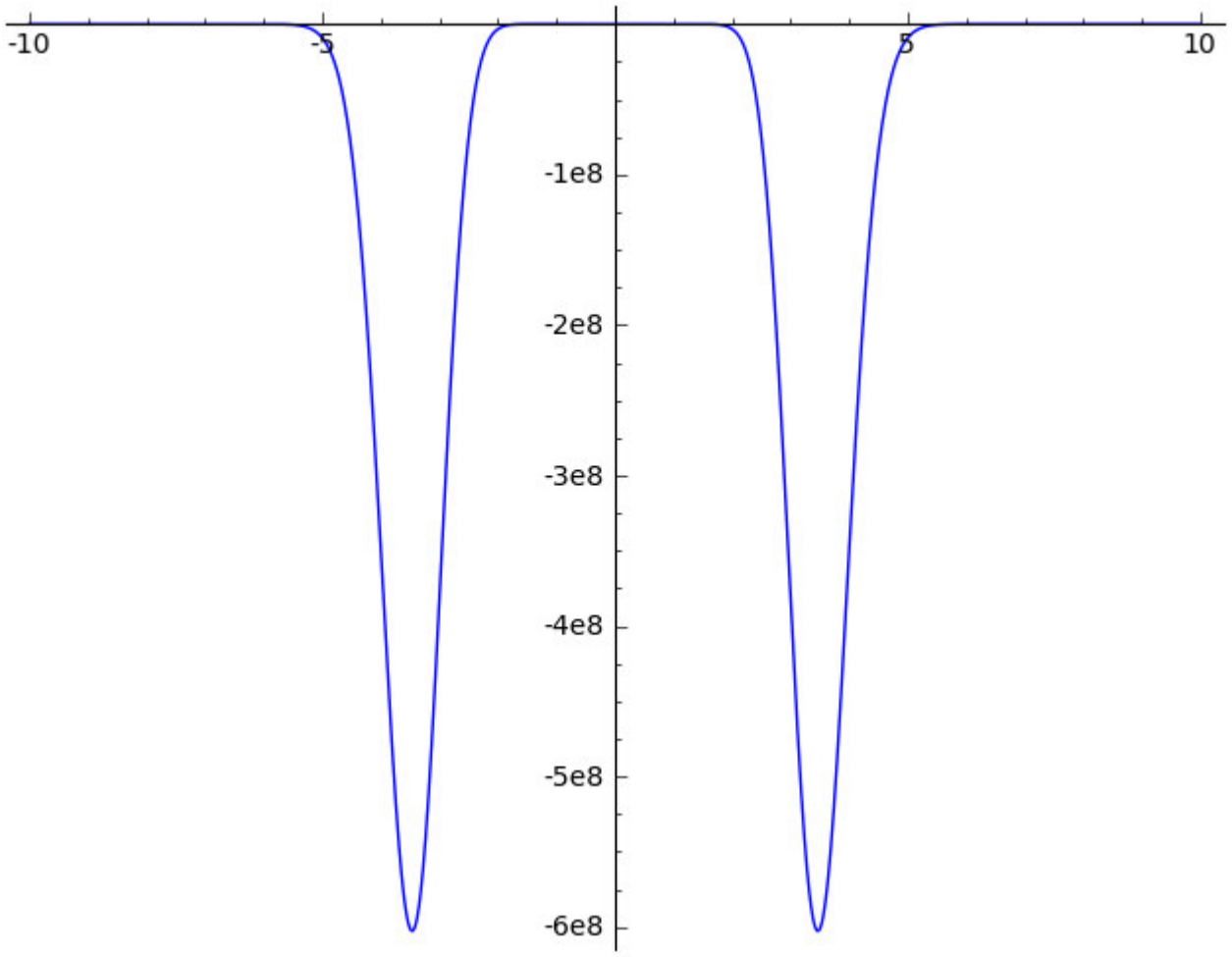
De vraag van 24 november 2011 ($\sqrt{11}$ punten)

Zij $f(x) = x^{2011} + a^{24}x^{11} + a^{11}x^{24} + (11a^{24} + 24a^{11})x + e^{a^2}$ en zij $x_1, ..., x_{2011}$ de nulpunten van f, waarbij elk nulpunt even vaak voorkomt als zijn multipliciteit. Zij $s(a) = \sum_{i=1}^{2011} \frac{1}{x_i}$. Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is $s(a)$ maximaal.

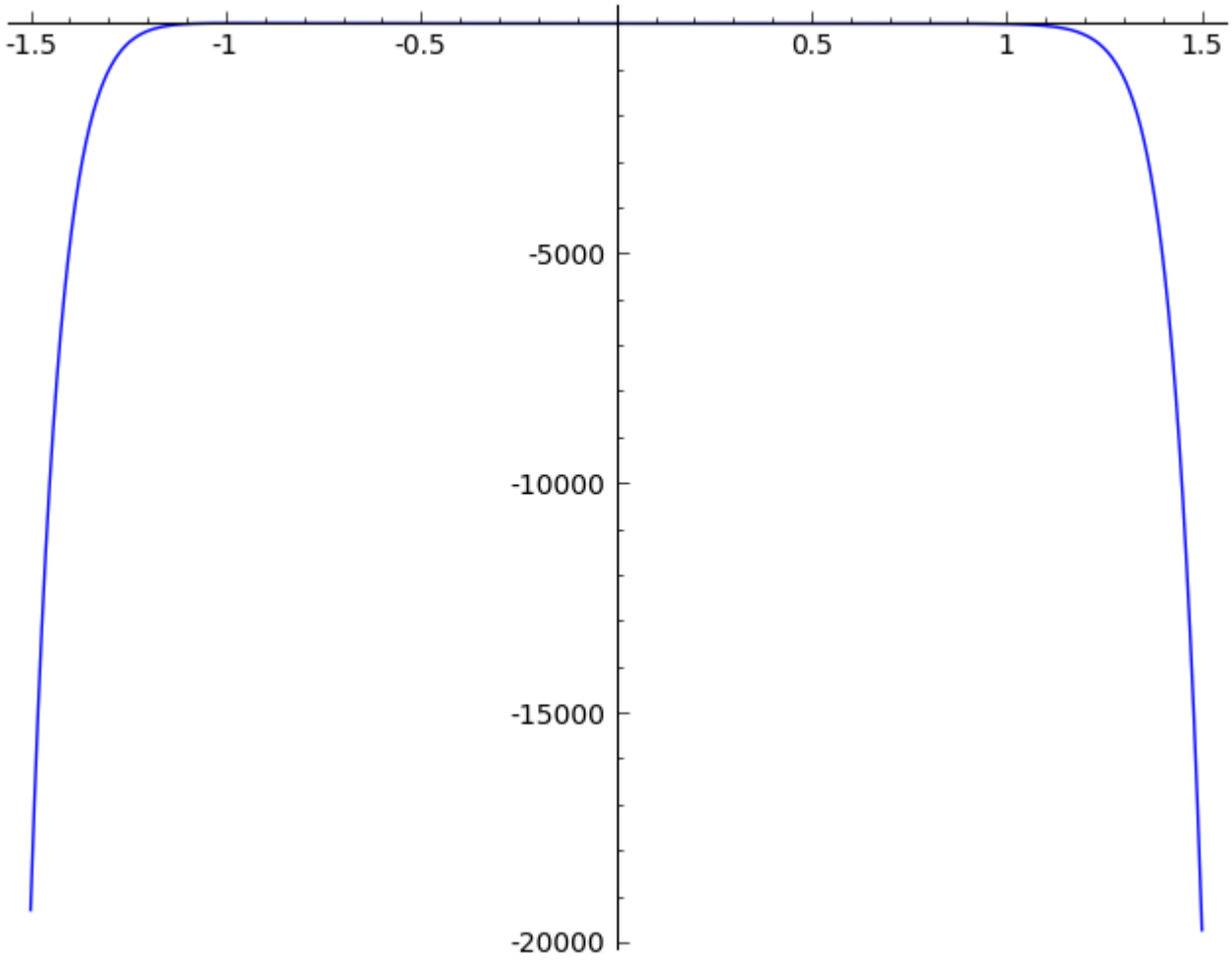
Antwoord:

Merk op dat $\prod_{i=1}^{2011} x_i = -e^{a^2}$ en $\sum_{i=1}^{2011} \prod_{i=j} x_i = (11a^{24} + 24a^{11})$. En dus: $s(a) = \frac{11a^{24}+24a^{11}}{-e^{a^2}}$. Door enkele plotjes te maken stellen we vast waar het maximum moet ligt.

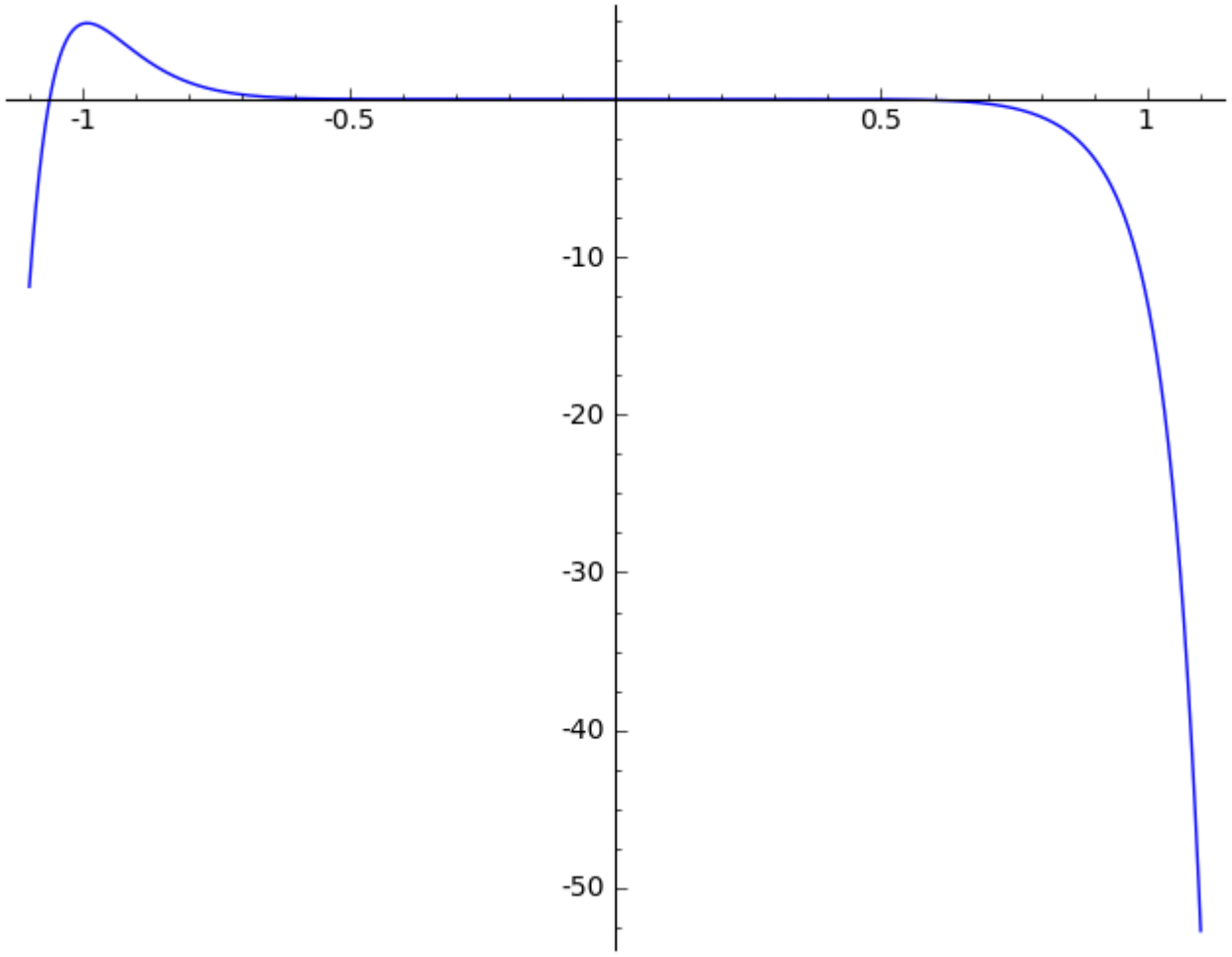
```
f(a)=(11*a^24+24*a^11)/(-e^(a^2))
plot(f,(-10,10))
```


-10
-5
5
10
-1e8
-2e8
-3e8
-4e8
-5e8
-6e8

```
plot(f,(-1.5,1.5))
```


-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
-5000
-10000
-15000
-20000

```
plot(f,(-1.1,1.1))
```



De oplossing is dus:

```
find_root(derivative(f(a),a),-1.1,-0.5)
```

```
-0.99146484444947425
```

Is er eentje jarig? ($\sqrt{13}$ punten)

Er zijn 7 miljard mensen op de wereld. Neem gemakshalve aan dat er op 29 februari niemand verjaart en dat elk ander moment even waarschijnlijk is als geboortedag en -tijdstip. Wat is de kans dat 2 mensen op dezelfde dag van het jaar, het zelfde uur, dezelfde minuut, dezelfde seconde, dezelfde milliseconde, dezelfde microseconde, dezelfde nanoseconde en dezelfde picoseconde geboren zijn?

Antwoord:

Zij n het aantal mensen op de wereld en N het aantal picoseconden per jaar. Het de waarde die we zoeken kunnen we schrijven is

$$1 - \frac{N!}{N^n(N-n)!} = 1 - \frac{\Gamma(N+1)}{N^n\Gamma(N+1-n)} = 1 - \exp\left(\log\Gamma(N+1) - n\log(N) - \log\Gamma(N+1-n)\right).$$

```
def birthday_gamma(N,n,K=RR):
    N = K(N)
    n = K(n)
    return 1 - exp(log_gamma(N+1) - n*log(N) - log_gamma(N+1-n))
```

```
N = 365*24*60*60*1000*1000*1000*1000
n = 7*10^9
```

```
birthday_gamma(N, n, RealField(128))
```

```
0.54016608247371523495245968553007054089
```

```
```