PRiME PUMAthematics

5 maart 2013

Antwoorden

1 Getallen kleuren

Veronderstel dat we dit niet kunnen voor een zekere kleuring en beschouw er zo één.

- Beschouwen we $a = 0$. Dan geldt wegens de veronderstelling op de kleuring: $\forall b \geqslant 1$: $b = 0 + b$ en $0 = 0 \cdot b$ hebben een verschillende kleur. Alle niet-nul getallen hebben dus een andere kleur dan 0.
- Beschouwen we $a = 1$. Dan geldt wegens de veronderstelling op de kleuring: $\forall b \geqslant 0$: $b + 1 = 1 + b$ en $b = 1 \cdot b$ hebben een verschillende kleur. Alle niet nul getallen worden dus alternerend gekleurd met twee kleuren, aangezien zij niet dezelfde kleur als 0 mogen hebben. D.w.z. alle strikt positieve even getallen hebben dezelfde kleur en alle oneven getallen hebben dezelfde kleur.
- Beschouw nu twee strikt positieve even getallen, niet beide 2. Hun som en product zijn opnieuw strikt positief en even, zodat zij dus wegens het voorgaande dezelfde kleur hebben, een strijdigheid.

2 Convexe functie

(a) Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$, we beschouwen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ met

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x = a \\ 0 & \text{anders} \end{cases}.$$

Het is duidelijk dat f discontinu is in a. We zien ook gemakkelijk in dat f convex is: als $x, y \in]a, b]$ dan hebben we voor $t \in]0, 1[$ $f(tx + (1-t)y) = 0 = tf(x) + (1-t)f(y)$. Als $x = a$ en $y \in]a, b]$ dan hebben we voor $t \in]0, 1[$ $f(tx + (1-t)y) = 0 < t = tf(x) + (1-t)f(y)$.

(b) Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ een convexe functie. Zij $x \in]a, b[$ willekeurig dan hebben we $u, v \in]a, b[$ met $u < x < v$. We bewijzen dat f linkscontinu is in x. Het bewijs dat f rechtscontinu is gaat volledig analoog. Zij $y \in]u, x[$ willekeurig. Dan hebben een $t \in]0,1[$ zodanig dat

$$y = tu + (1-t)x = t(u-x) + x. \tag{1}$$

Gezien $y < x < v$, hebben we ook een $s \in]0,1[$ zodanig dat

$$x = sy + (1-s)v = s(y-v) + v. \tag{2}$$

Gezien f convex is weten hieruit we dat

$$f(x) \leqslant sf(y) + (1-s)f(v).$$

In combinatie met (1) vinden we

$$\frac{1}{s}(f(x) + (s-1)f(v)) \leqslant f(y) \leqslant tf(a) + (1-t)f(x) \tag{3}$$

Als we nu de limiet $y \to x$ beschouwen dan zien we uit (1) en (2) dat

$$t = \frac{y-x}{u-x} \to 0 \text{ en } s = \frac{x-v}{y-v} \to 1.$$

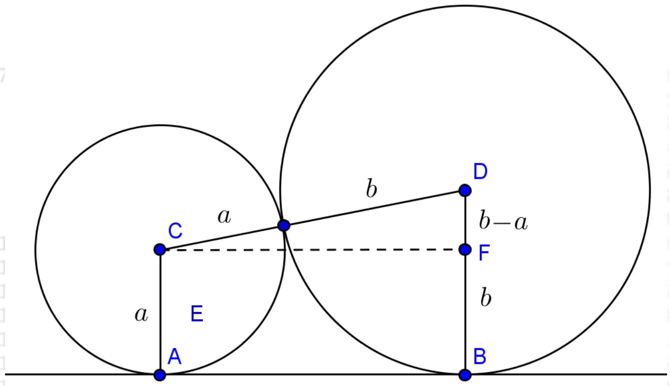
Dus vinden we dat $f(x) = \lim_{y \to x} f(y)$ want uit (3) volgt

$$f(x) = \lim_{y \to x} \frac{1}{s}(f(x) + (s-1)f(v)) \leqslant \lim_{y \to x} f(y) \leqslant \lim_{y \to x} tf(a) + (1-t)f(x) = f(x).$$

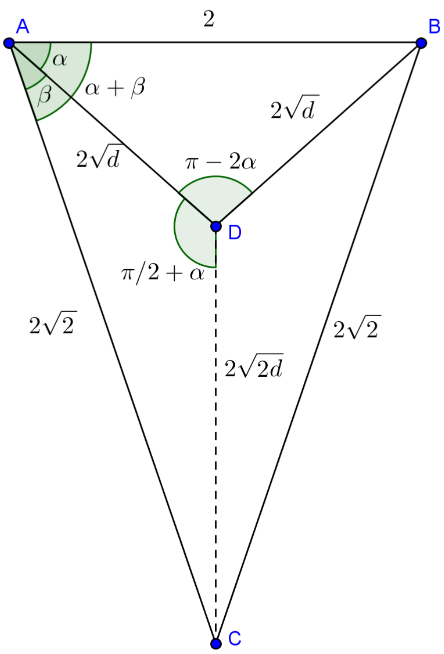
3 Knikkers

We zouden graag ons probleem in de driedimensionale ruimte omzetten naar een vlak probleem over driehoeksmeetkunde. De belangrijke eigenschap hiervoor is dat er, gegeven twee ballen met gegeven straal a en b, er een unieke afstand is waarvoor deze twee ballen rakend zijn. Deze afstand vinden we snel uit de figuur op de volgende bladzijde. De afstand tussen de punten A en B waar de ballen op het tafelvlak rusten is gelijk aan de afstand tussen C en F, wegens de stelling van Pythagoras gelijk aan $2\sqrt{ab}$. We hebben dus het volgende

$$\begin{aligned} &\text{Ballen met straal } a \text{ en } b\text{, rustend op een vlak raken} \\ \iff &\text{ de afstand tussen hun raakpunten met de vlak is } 2\sqrt{ab}. \end{aligned}$$



In de onderstaande figuur is nu het probleem op het vlak gegeven, waarbij de punten de raakpunten van de ballen met het vlak zijn. Op punt A en B liggen de twee knikkers met straal 1, op C ligt de knikker met straal 2. Op het punt D ligt de bal waarvan we de straal zoeken. We zoeken dus naar de straal d waarvoor deze configuratie mogelijk is.



Via driehoeksmeetkunde zullen we stap voor stap een identiteit halen waaruit we d zullen afleiden. Uit de cosinusregel in $\triangle ABD$ halen we

$$4d = 4d + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{d}\cos\alpha\ ,$$

dus

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{d}}\ .$$

Uit de sinusregel in $\triangle ADC$ halen we

$$\frac{\sin\beta}{2\sqrt{2d}} = \frac{\sin(\pi/2+\alpha)}{2\sqrt{2}} = \frac{\cos\alpha}{2\sqrt{2}}\ .$$

Wanneer we hier $\cos\alpha$ in invullen vinden we $\sin\beta = 1/2$, dus (omdat de driehoek $\triangle ABC$ scherphoekig is) $\beta = \pi/6$. Als derde gebruiken we de cosinusregel in $\triangle ACD$:

$$8d = 4d + 8 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}\sqrt{d}\cos(\beta)\ .$$

Omdat $\cos(\beta) = \sqrt{3}/2$ krijgen we hieruit

$$0 = d + \sqrt{6} \cdot \sqrt{d} - 2\,.$$

Hieruit halen we $\sqrt{d} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3} \pm \sqrt{7})$. Gezien $\sqrt{d} > 0$ krijgen we dus $d = 5 - \sqrt{21}$.

4 Gehele matrix

Noteer $e_1, \ldots, e_n$ als de standaardbasis van $\mathbb{N}^n$ (dus $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, met de 1 op positie i). Een belangrijk feit, dat meteen duidelijk is, is dat het onmogelijk is om e_i te schrijven als som van twee niet-nulvectoren in $\mathbb{N}^n$. Beschouw nu de i-de rij uit A: $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) = a_i = e_i A$. Dan volgt dat

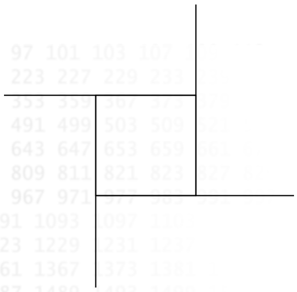
$$e_i = a_i A^{-1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j A^{-1}\,.$$

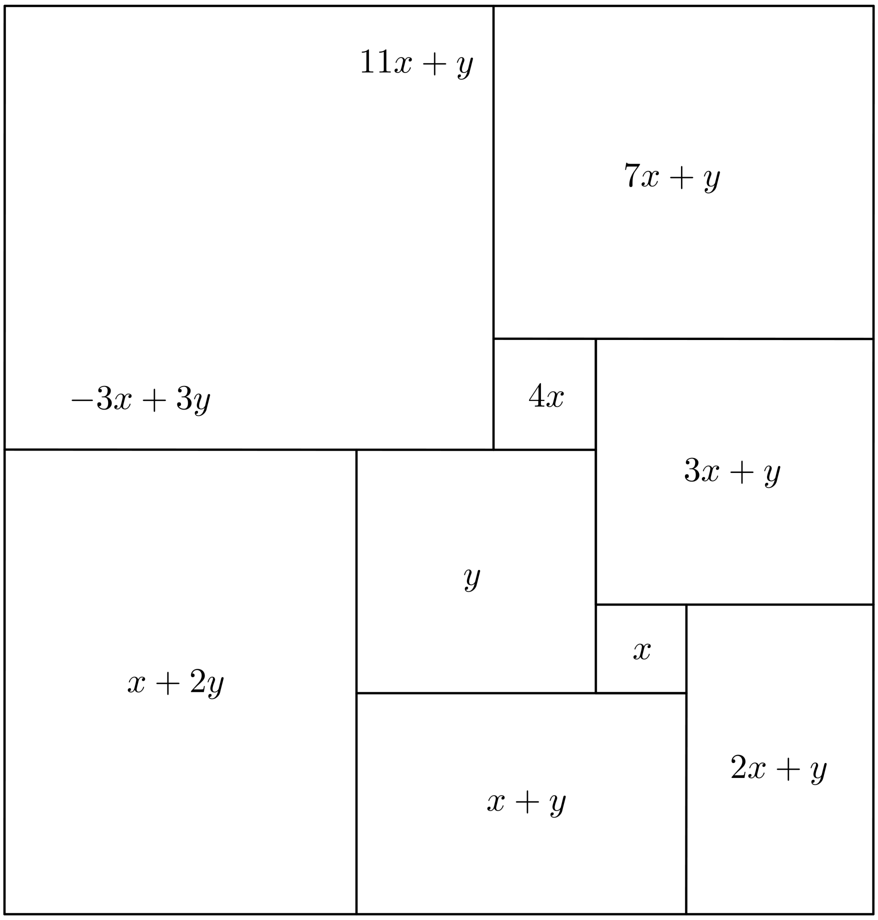
Omdat A^{-1} geen nulrijen kan bevatten is $e_j A^{-1}$ een niet-nulvector voor elke j, dus uit ons belangrijk feit volgt dat $a_{ij} \neq 0$ voor ten hoogste één j. Omdat e_i niet-nul is, moet $a_{ij} \neq 0$ voor exact één j. Bovendien is e_i onmogelijk te schrijven als het veelvoud van een vector, dus hebben we precies één $a_{ij} = 1$ en verder 0. We vinden dus dat A op elke rij precies één 1 heeft en verder enkel nullen. Uit de inverteerbaarheid, dus het feit dat $\det(A) \neq 0$, volgt dat ook elke kolom precies één 1 moet hebben (anders zou er een nulkolom zijn). We krijgen dus de permutatiematrices.

5 Vierkanten leggen

(a) Gezien we verschillende vierkant moeten gebruiken om de rechthoek te vullen, is de oppervlakte van de 9 verschillende vierkanten minstens $1^2 + 2^2 + \cdot + 9^2 = 285$. Er geldt echter dat $16 \cdot 17 = 272$, dus de 16×17-rechthoek is niet 9-vulbaar.

(b) Het is snel in te zien dat de kleinste vierkanten belangrijk zijn in een 9-vulling. Wanneer er geen vierkanten van kleiner formaat rond een gegeven vierkant liggen, moet het er lokaal steeds uitzien zoals in de afbeelding. Daarna kan je proberen een configuratie te vinden van 9 rechthoeken binnen een andere rechthoek, waarbij het de bedoeling is om daarna voorwaarden op de groottes te leggen, zodat alle 'rechthoeken' vierkanten worden. Één van de twee configuraties die zo mogelijk zijn is gegeven op onderstaande figuur.





Om nu de groottes van de vierkanten te bepalen stellen we dat twee 'vierkanten' zijde van lengte x en y hebben. We bepalen nu van onder naar boven toe telkens de groottes van de vierkanten, tot we in het vierkant linksboven komen. Daar kunnen we ofwel vanuit de rechterzijde denken, dan vinden we een grootte $11x + y$, ofwel vanuit de onderzijde, dat geeft een grootte van $-3x + 3y$. De gelijkheid van deze twee geeft nu een conditie op x en y opdat alle rechthoeken vierkanten zouden worden. Deze conditie reduceert zich tot $y = 7x$. Wanneer we $x = 1$ stellen, dan is $y = 7$, zodat we de 32×33-rechthoek vullen met 9 vierkanten van met zijdes 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 en 18.

6 Een familie functies

(a) We construeren een familie functies F die aan de gegeven voorwaarde voldoet, zodanig dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ en voor elke $0 < r$ een functie $f \in F$ en een $x \in]0, r[$ bestaan zodanig dat $|f(x)| \geqslant n$. Hieruit volgt dat voor elk interval $]a, b[$ met $0 \in]a, b[$ een $f \in F$ en $x \in]a, b[$ bestaan met $|f(x)| \geqslant n$ met $n \in \mathbb{N}$ willekeurig. We stellen $F = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ waarbij $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x \leqslant 0 \\ n^2 x & \text{als } 0 \leqslant x \leqslant n^{-1} \\ x^{-1} & \text{als } n^{-1} \leqslant x \end{cases}.$$

Het is duidelijk dat deze functies continu zijn. Merk op dat uit $0 < x \leqslant n^{-1}$ volgt dat $x^2 \leqslant n^{-2}$ en dus $n^2 x \leqslant x^{-1}$. Hieruit volgt dus dat voor $x > 0$ $f_n(x) < 1/x$. We stellen dus vast dat voor $x \in \mathbb{R}$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant \begin{cases} 0 & \text{als } x \leqslant 0 \\ x^{-1} & \text{als } x > 0 \end{cases}.$$

Om te besluiten dat F de familie is die we zoeken rest ons enkel nog vast te stellen dat voor elke $r > 0$ en $n \in \mathbb{N}$ we een $m \geqslant n$ hebben met $r > m^{-1}$ en dus $f_m(m^{-1}) = m \geqslant n$.

(b) We bewijzen, vanuit het ongerijmde, dat voor een familie F zoals in het gegeven er een $x \in \mathbb{R}$ bestaat waarvoor een open interval I bestaat met $x \in I$ waarvoor $\sup_{y \in I} \sup_{f \in F} |f(y)| < \infty$. We nemen dus aan voor alle $x \in \mathbb{R}$ en voor alle open intervallen I met $x \in I$ geldt $\sup_{y \in I} \sup_{f \in F} |f(y)| = \infty$. Met andere woorden: voor elk niet leeg open interval I en voor elke $k \in \mathbb{N}$ bestaat er een $f \in F$ en een $y \in I$ zodanig dat $|f(y)| > k$. Definiëren we

$$A_k = \{x \in \mathbb{R} | \exists f \in F : |f(x)| > k\}$$

dan weten we dus dat voor alle $k \in \mathbb{N}$ en voor alle niet lege open intervallen I geldt $I \cap A_k \neq \emptyset$.
Zij $x \in A_k$ dan hebben een $f \in F$ met $|f(x)| - k > 0$ en dus hebben we, gezien f continu is, voor een zeker $\delta > 0$

$$|y - x| \leqslant \delta \Rightarrow \big||f(x)| - |f(y)|\big| < |f(x)| - k.$$

Voor $y \in [x - \delta, x + \delta]$ hebben we dus

$$|f(x)| - |f(y)| \leqslant \big||f(x)| - |f(y)|\big| < |f(x)| - k,$$

waaruit we vinden dat $|f(y)| > k$. Hieruit besluiten we dat A_k open is.
Neem $I_0 = [0, 1]$. Definieer recursief $x_{k+1} \in I_k^\circ \cap A_k$ en

$$I_{k+1} = [x_{k+1} - \delta, x_{k+1} + \delta] \subseteq I_k^\circ \cap A_k$$

voor zekere $\delta > 0$. Dit is goed gedefinieerd gezien I_k° voor elke k een niet leeg open interval is en dus $I_k^\circ \cap A_k \neq \emptyset$. Anderzijds is $I_k^\circ \cap A_k$ voor elke k een intersectie van twee open verzamelingen en dus open, dus vinden we een gepaste δ om I_{k+1} te definiëren.
Gezien I_k voor elke k een compacte verzameling is en $I_{k+1} \subset I_k$ hebben we wegens de stelling van vernestelde compacta dat $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \neq \emptyset$. Gezien voor elke k $I_{k+1} \subset A_k$ vinden we dat er een x bestaat met

$$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Voor deze x hebben we dus voor elke $k \in \mathbb{N}$ een $f \in F$ met $|f(x)| > k$ en dus $\sup_{f \in F} |f(x)| = \infty$, wat strijdig is met onze onderstelling over de familie F.