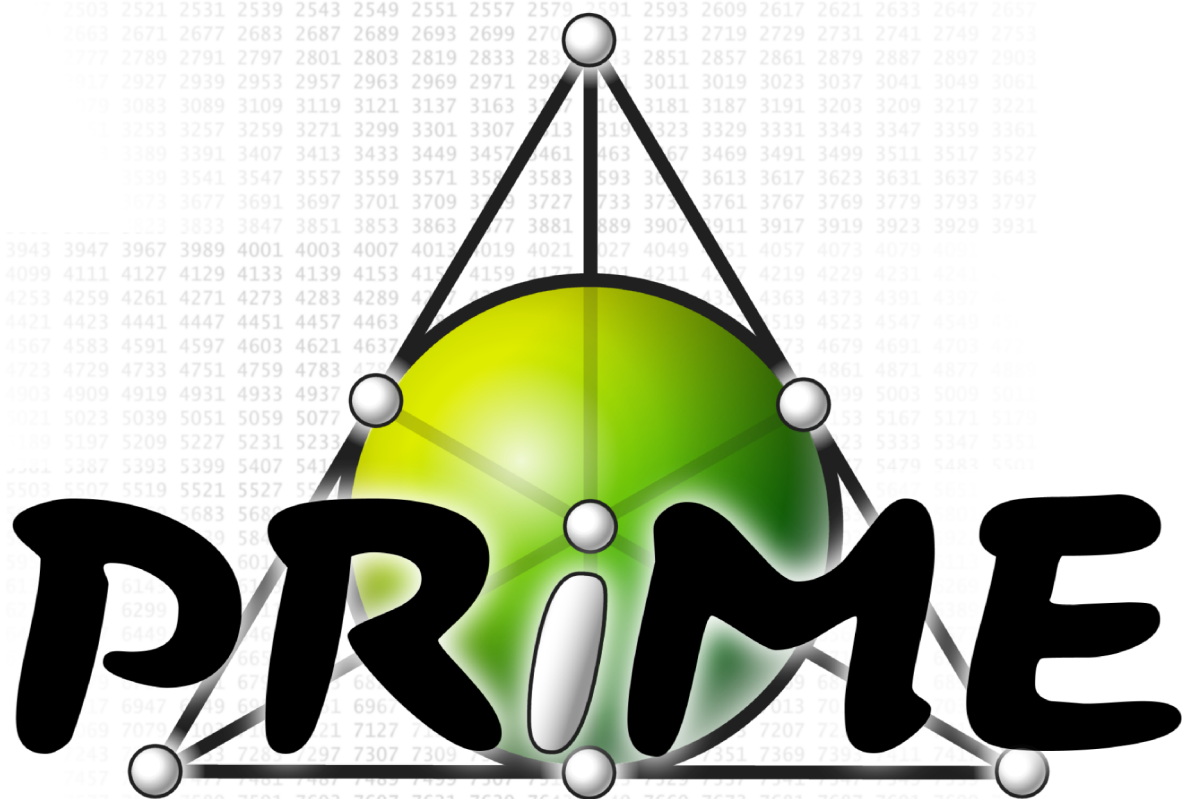


DUMAthematics

5 maart 2013



Sponsored by optiver 



PUMAthematics

5 maart 2013

Wedstrijdreglement

- (a) De competitie bevat zes vragen, die elk op evenveel punten staan. Indien een vraag uit twee puntjes bestaat, staat het eerste op 1/3 van de punten en het tweede op 2/3 van de punten. Je krijgt 150 minuten de tijd om zoveel mogelijk vragen en onderdelen op te lossen.
- (b) Handboeken, rekenmachines, gsm's en andere hulpmiddelen zijn hierbij niet toegestaan, enkel pen en papier mogen gebruikt worden.
- (c) Vermeld op ieder ingediend blad duidelijk je naam, jaar en richting, en de vraag. Werk op elk blad maar aan één vraag.
- (d) Bij verdere vragen of betwistingen is uitsluitend de jury bevoegd.
- (e) Door deel te nemen aan de PUMA 2013 verklaart men zich akkoord met dit reglement.

De proclamatie van deze wedstrijd gaat door op 14 maart 2013 om 13.00h in gebouw S9, auditorium A3. Wil je weten naar wie de 100 euro prijzengeld gaat of wie de eer van de Universiteit Gent mag verdedigen op de IMC 2013, beschouw dit dan gerust als een uitnodiging. Ter celebratie van π -dag vindt tegelijk ook ons π -zzafestijn plaats, je kunt hier dus gerust je middagmaal nuttigen. Wil je een pizza bestellen, dan raden we je aan dat dan op voorhand op onze website in te geven voor een snellere bediening. Verdere informatie verschijnt tijdig op onze website: <http://prime.ugent.be>.



PUMAthematics

5 maart 2013

Vragen

1 Getallen kleuren

Indien we alle natuurlijke getallen, i.e. $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, kleuren met drie kleuren, is het dan altijd mogelijk om twee getallen a en b , niet beide 0 en niet beide 2, te vinden zodat $a + b$ en $a \cdot b$ dezelfde kleur hebben?

2 Convexe functie

Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval. We noemen een functie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ *convex* als $\forall x, y \in I \quad \forall t \in]0, 1[$ geldt

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$.

(a) Is elke convexe functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu?

(b) Is elke convexe functie $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continu?

3 Knikkers

Op een tafel liggen twee knikkers met straal 1 centimeter, en één knikker met straal 2 centimeter. De drie knikkers raken allemaal aan elkaar. In de veronderstelling dat de drie knikkers perfecte sferen zijn, bepaal de straal van de bal die we tussen de knikkers kunnen leggen, zodanig dat deze bal aan alle knikkers raakt.

IF YOU CAN
READ CODED

20 5 24 20

AS FAST AS

14 15 18 13 1 12

TEXT YOU

MIGHT 2 5

THE ONE.

WE ARE SCOUTING FOR **BRILLIANT** MINDS ONLY
START YOUR CAREER IN **TRADING** → APPLY AT WWW.OPTIVER.COM

optiver 



PUMAthematics

5 maart 2013

4 Natuurlijke matrix

Zij $A \in \mathbb{N}^{n \times n}$ een inverteerbare matrix waarvoor ook $A^{-1} \in \mathbb{N}^{n \times n}$. Geef alle mogelijke matrices die hieraan voldoen.

5 Vierkanten leggen

We noemen een $n \times m$ -rechthoek ($n, m \in \mathbb{N}$) 9-vulbaar indien we ze kunnen vullen met 9 vierkanten van verschillende grootte, maar met zijde van gehele lengte.

- (a) is de rechthoek van formaat 16×17 9-vulbaar? Indien ja, geef zo'n opvulling. Indien nee, bewijs.
- (b) is de rechthoek van formaat 32×33 9-vulbaar? Indien ja, geef zo'n opvulling. Indien nee, bewijs.

6 Een familie functies

Zij F een familie continue functies $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor $\forall x \in \mathbb{R} \sup_{f \in F} |f(x)| < \infty$. We noemen de familie F lokaal begrensd in $x \in \mathbb{R}$ als er een open interval $I \subset \mathbb{R}$ bestaat met $x \in I$ met $\sup_{y \in I} \sup_{f \in F} |f(y)| < \infty$.

- (a) Kan er zo een familie F bestaan waarvoor F niet lokaal begrensd is in een zeker punt $x \in \mathbb{R}$?
- (b) Kan er zo een familie F bestaan waarvoor F niet lokaal begrensd is in alle $x \in \mathbb{R}$?