



De tijd van Hilbert



Lezing
Voor PRIME
9 oktober 2013

Bert Seghers
Vakgroep Wiskunde
Universiteit Gent



De tijd van Hilbert



David
Hilbert

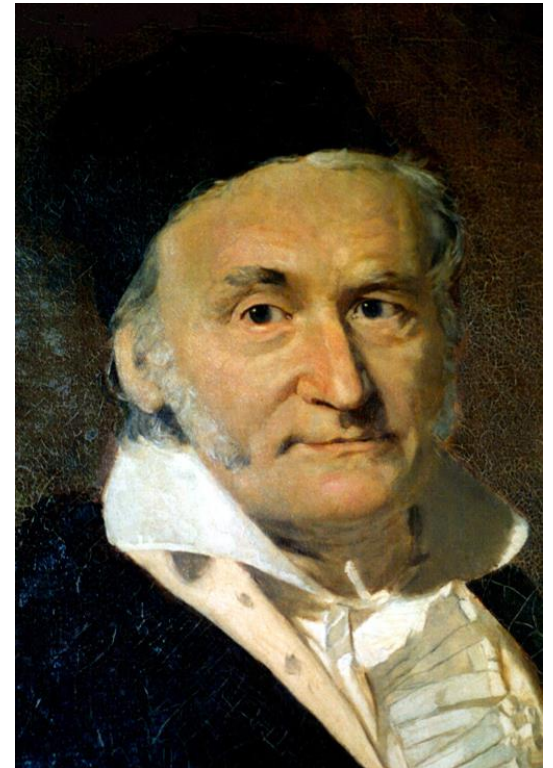
Wiskunde aan het begin
van de twintigste eeuw

De grond-
slagencrisis



Achtergrond

- Europa, 2de golf IR
- Snelle ontwikkeling wiskunde
- Gauss, Weierstrass
- Niet-Euclidische meetkunden
 - Bolyai
 - Lobachevsky



Hilberts jeugd in Königsberg

- °1862, vader rechter
- Wiskundige traditie Königsberg
- Jeugdvriend Minkowski
- Hilbert geen wonderkind

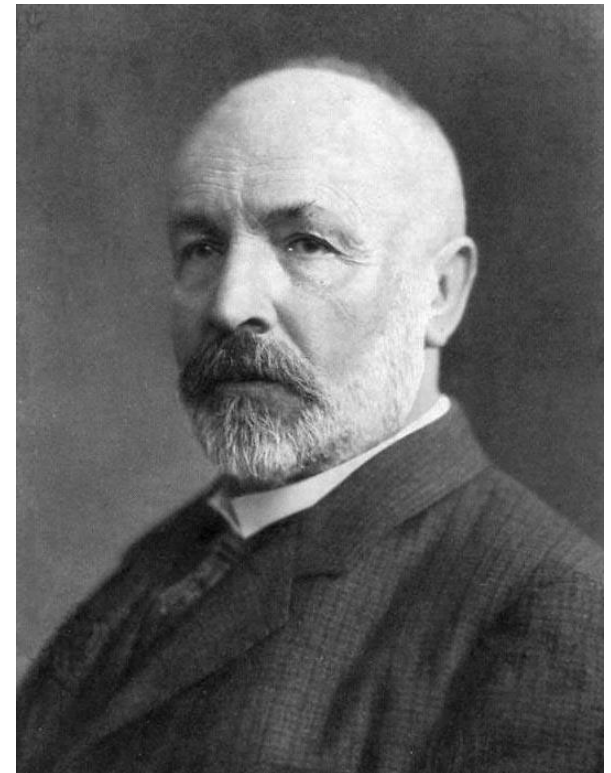




*Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat,
soll uns niemand vertreiben können (Hilbert, 1925)*

Cantors verzamelingenleer (1873)

- Originele behandeling oneindig
- Verschillende oneindigheden
- Reëlen overaftelbaar
- Controverse (transcendenten)



Hilbert op rondreis

- Naar Leipzig: Felix Klein
- Legendarisch wiskundige



Hilbert op rondreis

- Naar Leipzig: Felix Klein
- Legendarisch wiskundige
- Naar Parijs: Henri Poincaré
- Jordan, Poincaré, Hermite



Hilbert op rondreis

- Naar Leipzig: Felix Klein
- Legendarisch wiskundige
- Naar Parijs: Henri Poincaré
- Jordan, Poincaré, Hermite
- Naar Berlijn: Leopold Kronecker



Probleem van Gordan

- Eindige basis invarianten?
- Gordan: rekenwonder
- Alle pogingen rekenwerk



Probleem van Gordan (1888)

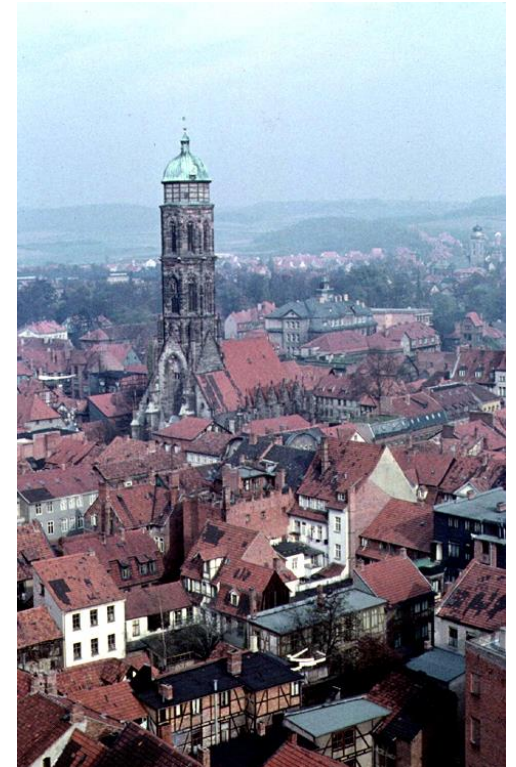
- Niemand voorbereid
- Hilberts basisstelling
- Verrassing, tegenstand
- Existentie volgens Hilbert en Kronecker
- Volgende jaren aanvaard





Hilbert naar Göttingen (jaren '90)

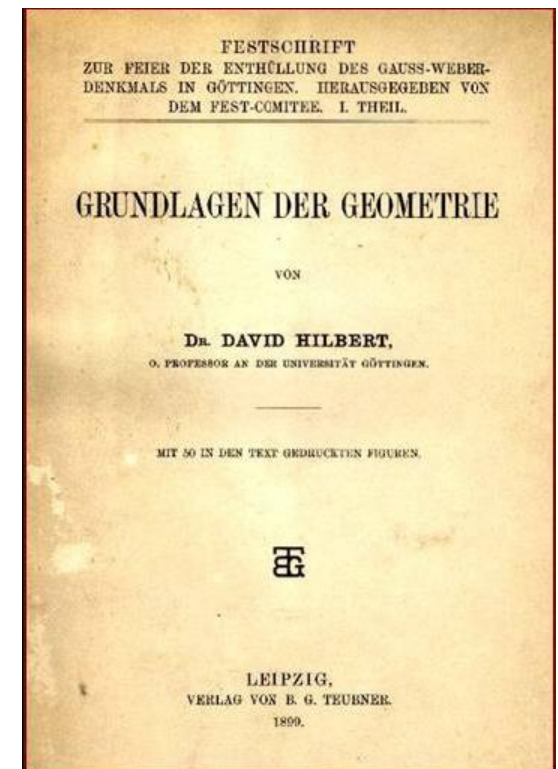
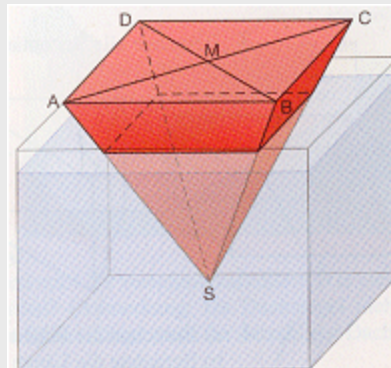
- Klein haalt Hilbert naar Göttingen
- Open deur, conversatie
- MS gaf opdracht getaltheorie
- 1897: *Zahlbericht*





Axiomatisatie van de meetkunde (1899)

- 1891: Halle
- Grundlagen der Geometrie
 - 21 axioma's
 - Eenvoud
 - Compleetheid
 - Onafhankelijkheid
 - Consistentie
- Invloedrijk werk



De 23 problemen van Hilbert (1900)

- 1900, Parijs, 2^{de} ICM
- Legendarische speech
- Belangrijke problemen
- Nieuwe takken wiskunde



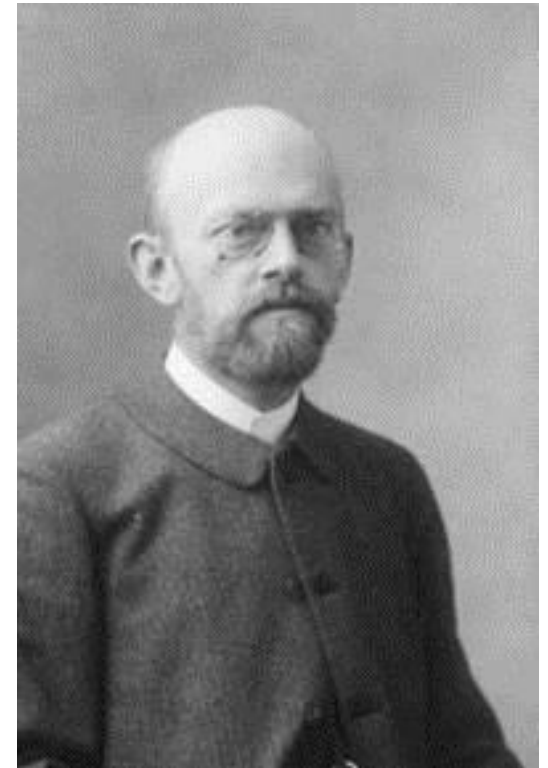
Enkele problemen van Hilbert (1900)

1. Continuümhypothese
2. Consistentie van de rekenkunde
6. Axiomatisatie van de fysica
8. Riemannhypothese en
Vermoeden van Goldbach

...

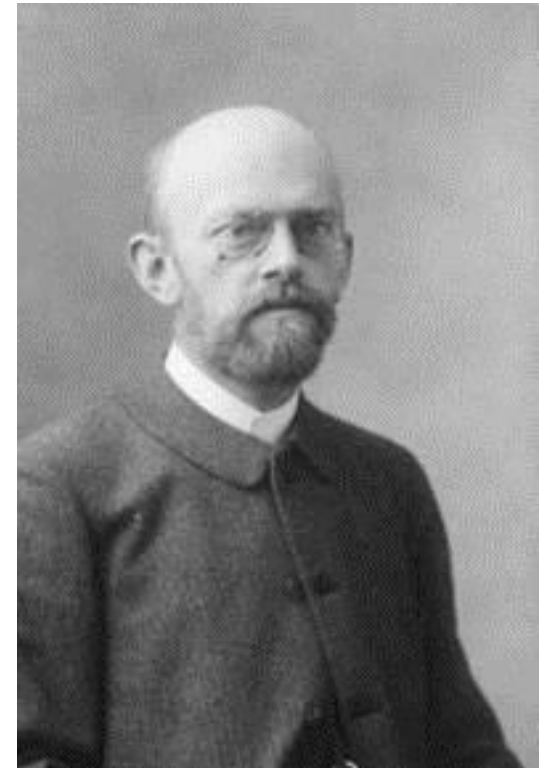
Hilbert bekendste wiskundige

- Speech trekt aandacht en verbeelding van alle wiskundigen
- Göttingen: honderden studenten
- Berlijn verliest centrumstatus



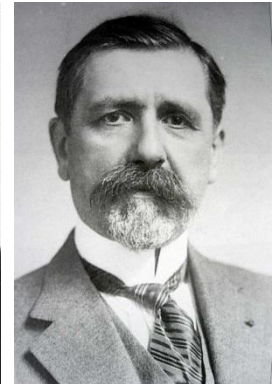
Hilbert bekendste wiskundige

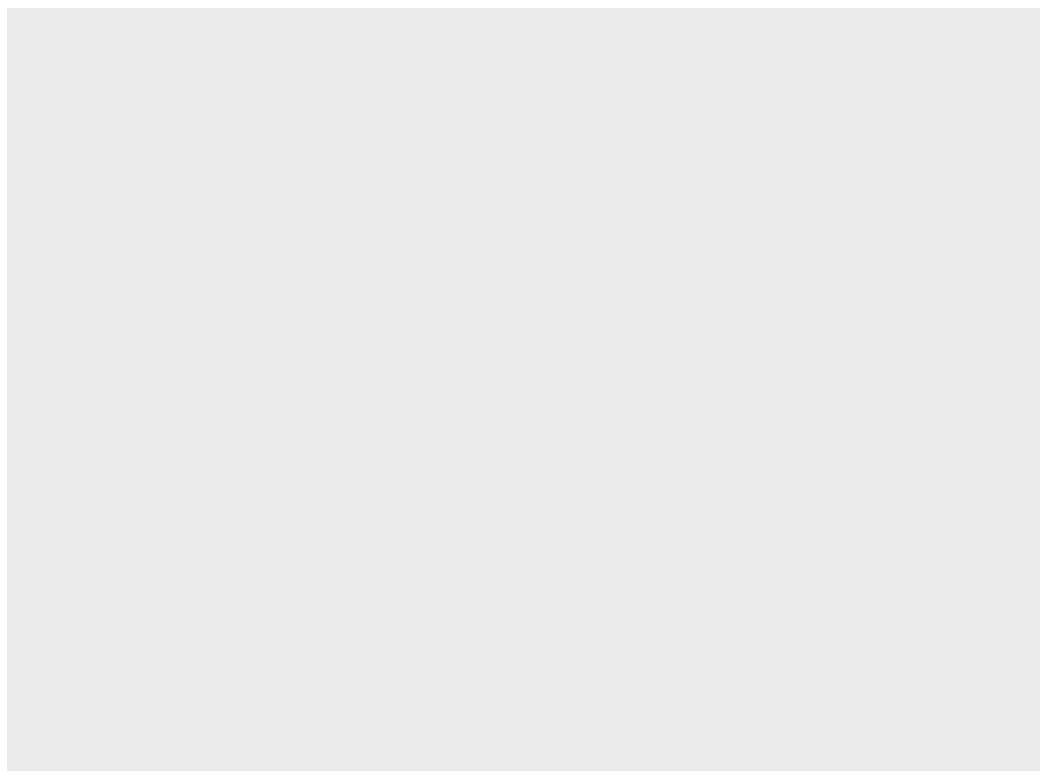
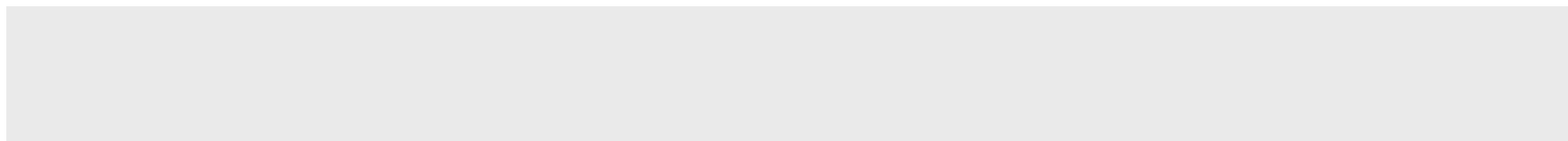
- Hilbert blijft problemen oplossen:
Dirichletprincipe
- *Herr Geheimrat*
- Minkowski en Runge professor
- Eigenaardigheid uitgesprokener



Ontwikkeling maattheorie

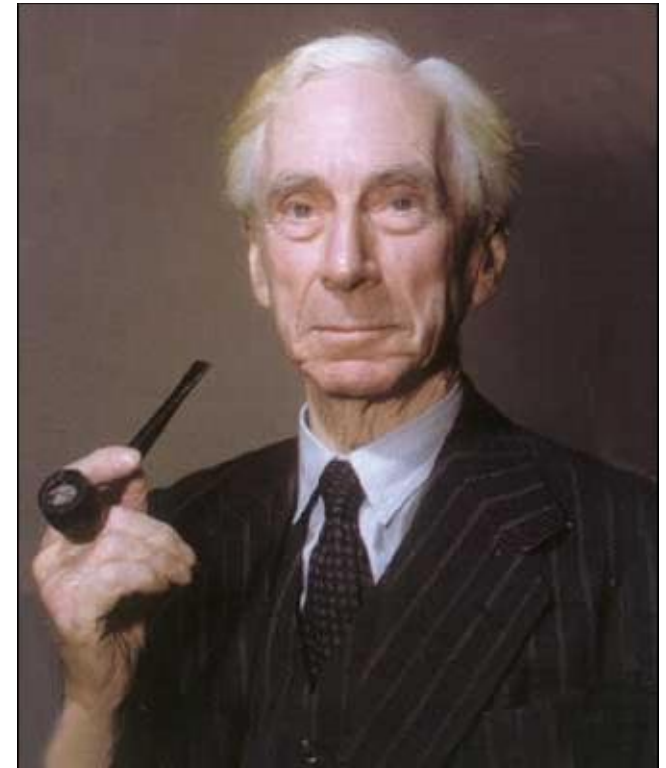
- Rapport verzamelingenleer
- Maattheorie: Borel, Lebesgue
en Baire
- Lebesgue-integraal





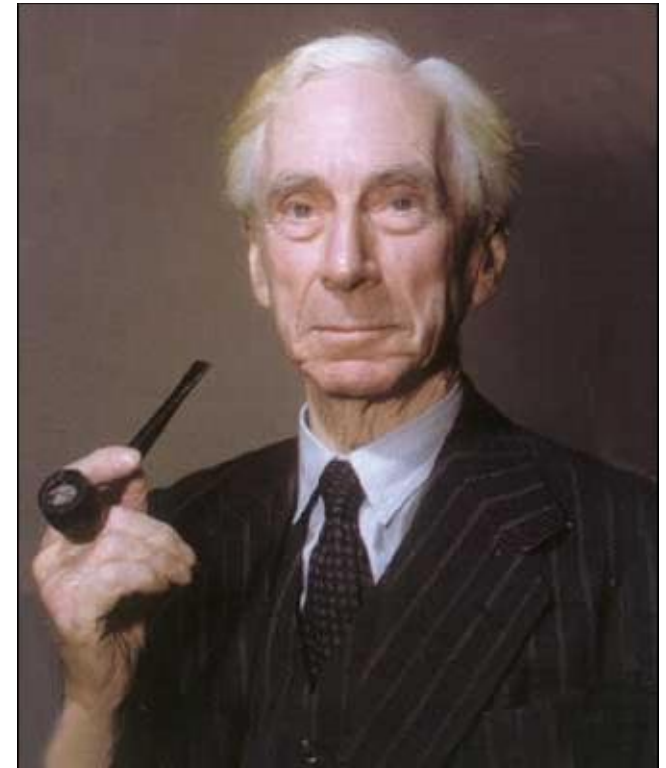
Paradox van Russell (1901 – 1903)

- Russell, juni 1901
- Zermelo, 1900
- Contradictie in Cantors naïeve verzamelingenleer
- Frege's *Grundlagen*



Paradox van Russell (1901 – 1903)

- Rampzalig
 - Verzamelingenleer $\rightarrow \perp \rightarrow \Omega$
 - Verzamelingtheoretici haken af
- Hilbert: bewijstheorie
- Zermelo
 - Interesse in fundamente
 - Zelf paradox ontdekt
 - Wohlordnungssatz



Wohlordnungssatz (1904)

- Zermelo: Elke verzameling heeft een welordening
- Contra-intuïtief
- Massale kritiek
- Volgende stap: ...



Axiomatisatie van de verzamelingenleer (1908)

- Axioma van specificiteit
- Keuzeaxioma
- Axioma van oneindigheid
- Verder geoptimaliseerd door Skolem en Fraenkel (1922)

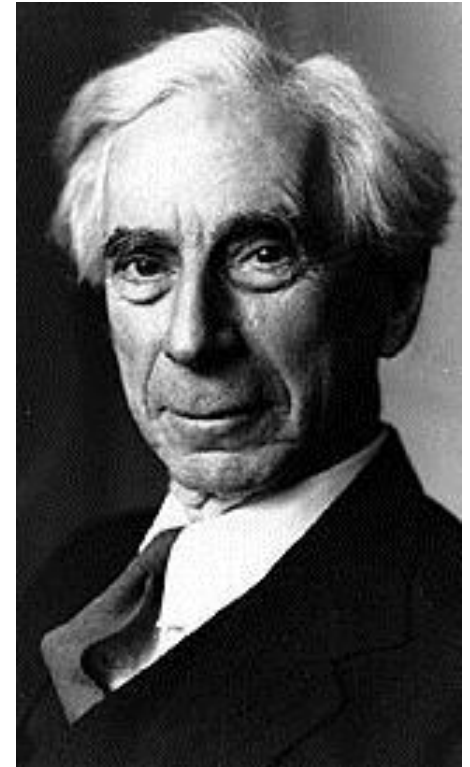
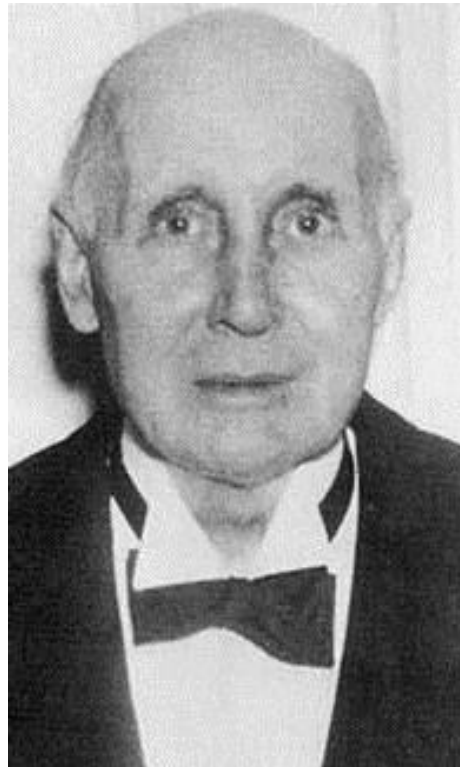




Logicisme

- Gottlob Frege
- Logica als basis
- Russell & Whitehead
- Principia

Mathematica



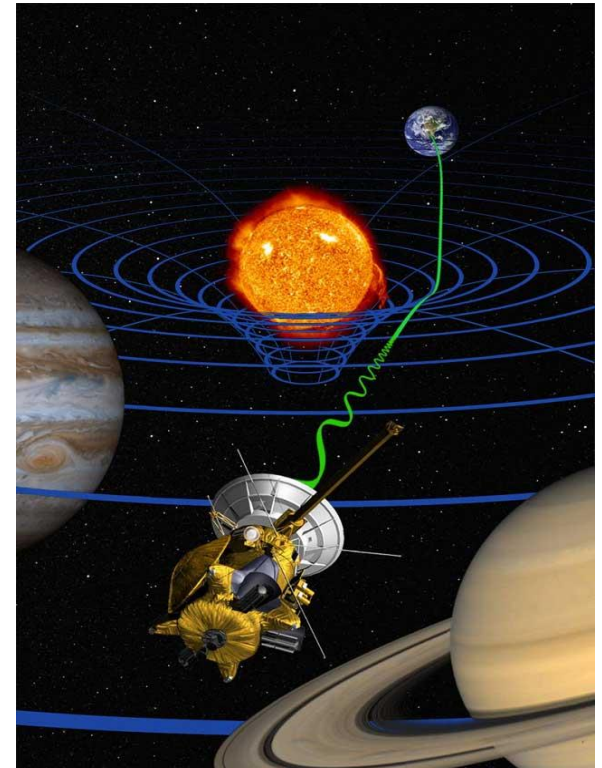
Ontwikkelingen in de fysica

- Ontdekkingen vragen modellen
 - 1887: Lichtsnelheid constant
 - 1888, 1896: Elektromagnetische straling
 - 1900: Kwantumhypothese
 - 1904: Modellen aanloop relativiteitsprincipe
 - 1905: Einstein
 - 1897, 1911, 1913: Atoommodellen
- Hilbert vanaf 1905



Einstein en Algemene Relativiteit (1915)

- Gravitatieveldvergelijkingen:
Hilbert-Einsteinvergelijkingen
- Spiekbrief
- Impact op Hilbert
 - Cursus algemene relativiteitstheorie
 - 3-dimensionale Euclidische ruimte verliest haar bevoorrechte rol



Kwantumfysica (1925 – ...)

- Born & Heisenberg:
matrixmechanica
- Schrödinger: golfmechanica,
differentiaalvergelijkingen
- Hilbertruimten



Diversiteit in Göttingen

- Hilbert discrimineerde niet
- Göttingen overleefde WO I
- In memoriam Darboux



Intuitionisme (1918)

- Brouwer met 3 artikelen
- Wiskunde baseren op intuïtie
- Verwerpt tertium non datur voor oneindige verzamelingen
- Hilbert: «Gevaar voor wiskunde»
- Alternatief: bewijstheorie



Hilberts programma (jaren '20)

- Wiskunde: inhoudsvolle begrippen en logische bewijzen
- Dit *kan* allemaal geformaliseerd worden
- Studieobject: sequenties van symbolen, syntactische manipulaties volgens logicaloze regeltjes
- Voordeel: formules eindig, finitistische methoden
- Hilberts programma (formalisme)
 - Wiskunde formaliseren
 - Metatheorie ontwikkelen
 - Metamathematisch consistentiebewijs

Hilberts programma: caveat!

- Kritiek: betekenisloos woordenspel
- Maar slechts oplossing
- **NIET** ware toedracht van wiskunde
- **Formalisme $\neq$ overtuiging**
- Hausdorff



Hilberts optimisme

« *Wir müssen wissen
wir werden wissen* »

- *Voor Hilbert geen ignorabimus*
- Op dat moment...



Gödel (1930)

- Doctoraatsthesis Kurt Gödel
 - Volledigheid van de predikaatcalculus
 - Onvolledigheid van de rekenkunde
 - Consistentiebewijs onmogelijk



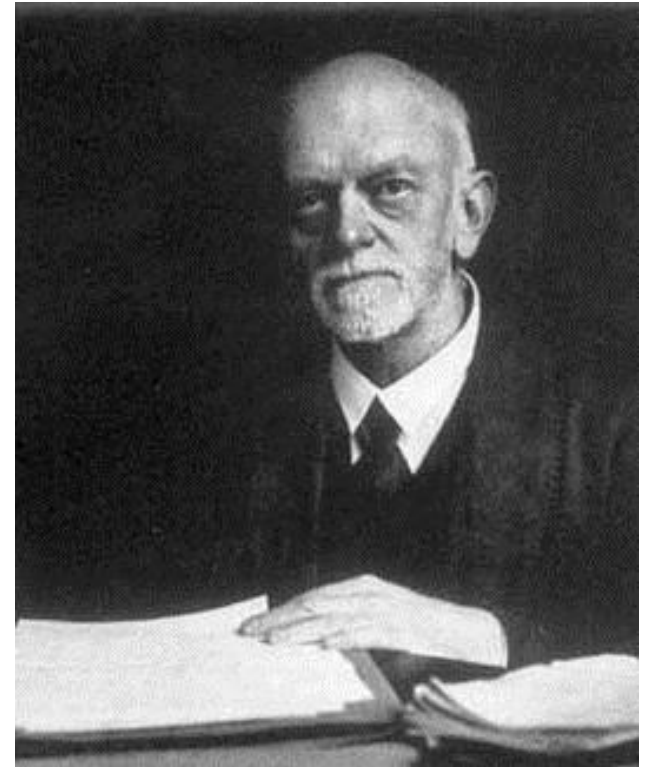
Onvolledigheidsstellingen (1930)

- Diepe stelling, over wiskunde
- Wiskunde is niet « perfect »
- Overweldigend bewijs



Einde (1933-1943)

- Göttingen overleeft Hitler niet
- « *Wiskunde in Göttingen?*
Er is er echt geen meer! »
- Scherp onderzoek logica
- † 1943



De tijd van Hilbert

