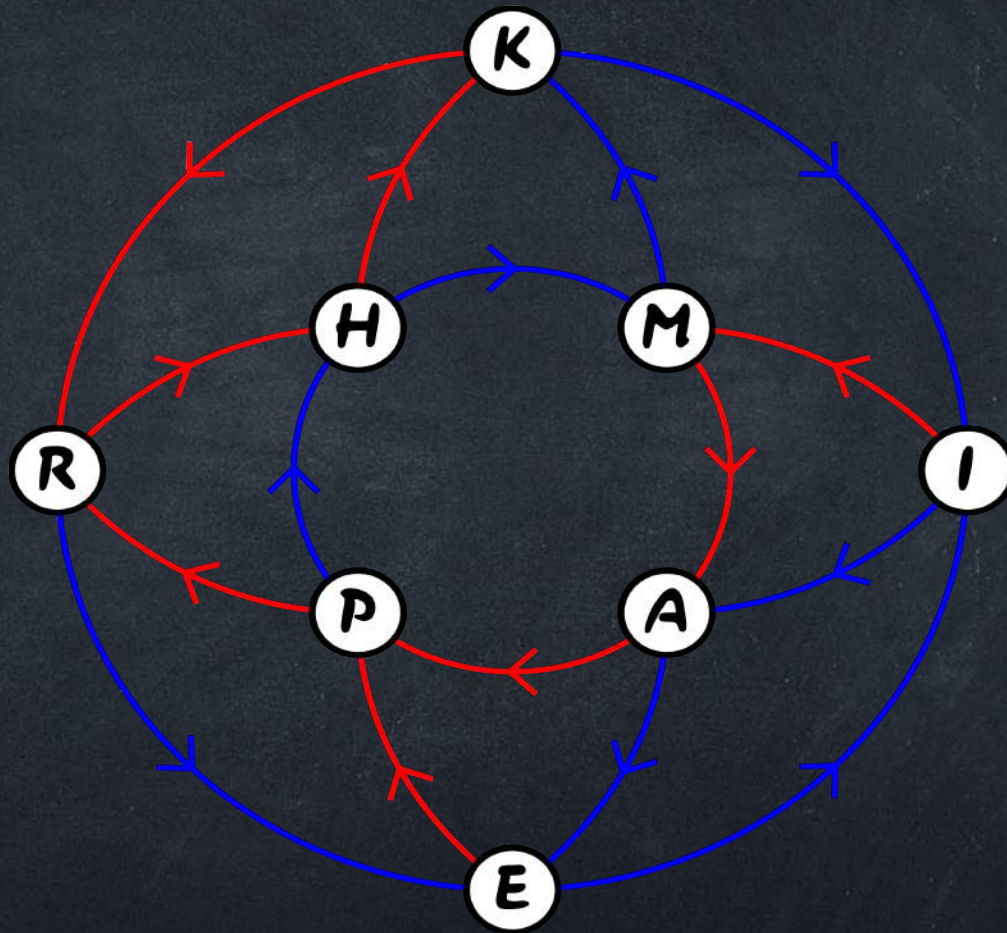


math
magic

Road coloring problem



Road coloring problem

- ★ Elke eindige, sterk verbonden, aperiodieke, gerichte graaf met uniforme uitgraad heeft een synchroniserende kleuring.
- ★ Belangrijk resultaat in automatentheorie.

Muntenwichelarij

Aantal munten over	Toeschouwers' keuze		
	A	B	C
1			
2			
3			
5			
6			
7			

De Bruijn-sequenties

- ★ Cyclisch gelezen rij waarin elke mogelijke combinatie van een vastgekozen lengte uit een vast alfabet precies één keer optreedt als deelrij.
- ★ Binair voorbeeld voor lengte 3: 0-0-0-1-0-1-1-1.

De Bruijn-sequenties

- ★ Truc maakt gebruik van een eenvoudig te onthouden "bijna-De Bruijn-rij" van lengte 31 (i.p.v. 32):

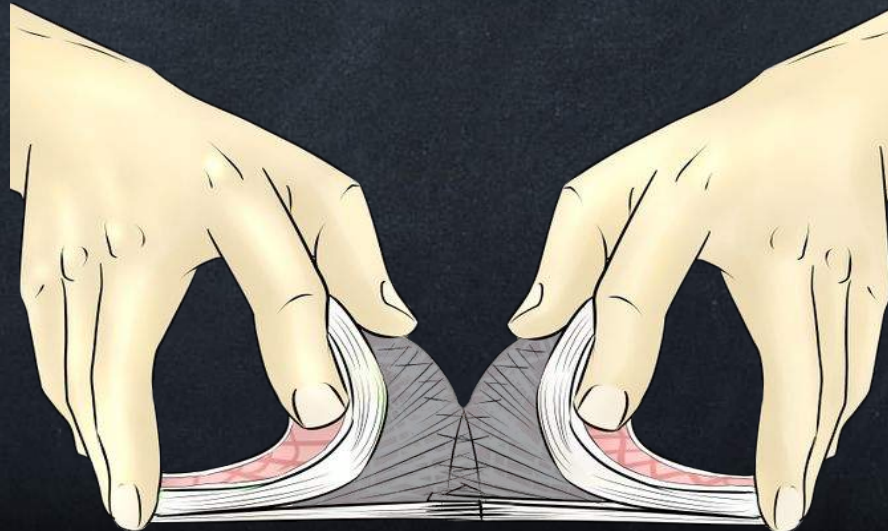
0-0-0-0-1-0-0-1-0-1-1-0-0-1-1-1-1-1-0-0-0-1-1-0-1-1-1-0-1-0-1.

- ★ $a-b-c-d-e$ wordt $b-c-d-e-f$ waarbij $f = a + c \pmod{2}$.
- ★ Bijjectie tussen deelrijen en kaarten in stapel.

Principe van Gilbreath

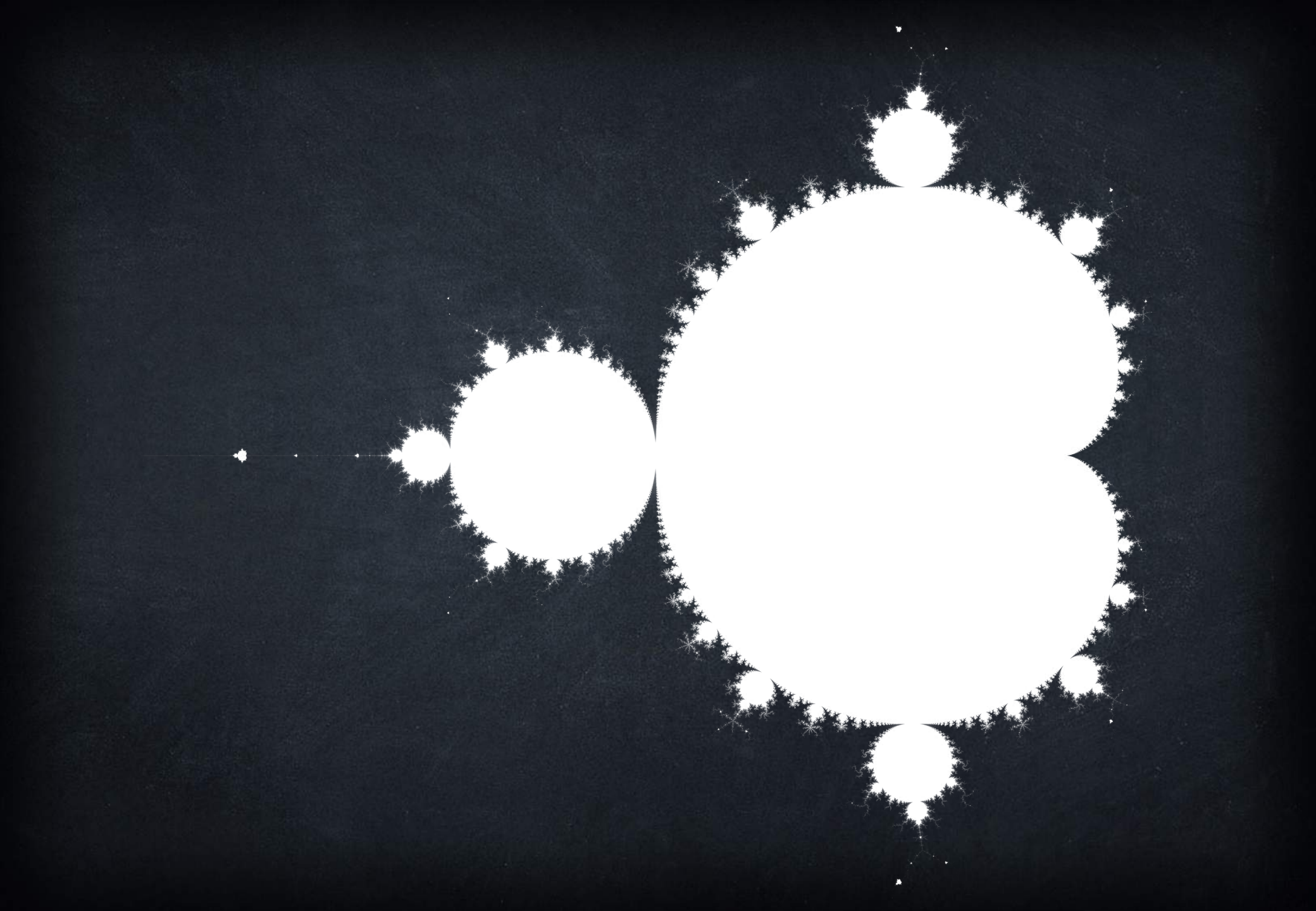
★ Gilbreathpermutatie:

1. Deel een aantal kaarten van de top van de stapel één voor één af naar een nieuwe stapel.
2. Riffle shuffle de twee stapels dooreen.



Principe van Gilbreath

- ★ Voor kaarten genummerd $1, 2, \dots, n$ zijn equivalent:
 - De kaarten vormen een Gilbreathpermutatie;
 - Voor elke k zijn de eerste k kaarten verschillend modulo k ;
 - Voor elke k zijn de eerste k , de tweede k , ... kaarten verschillend modulo k ;
 - Voor elke k zijn de eerste k kaarten opeenvolgend in $1, 2, \dots, n$.



Verband met de Mandelbrotfractal

- ★ Iteratie $z \rightarrow z^2 + c$.
- ★ $0 \rightarrow c \rightarrow c^2 + c \rightarrow (c^2 + c)^2 + c \rightarrow ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c \rightarrow \dots$
- ★ Mandelbrotfractal: verzameling complexe waarden c zodat deze baan niet naar oneindig divergeert.

Verband met de Mandelbrotfractal

★ Beschouw een reëel periodiek punt, bijvoorbeeld:

- $c = -1,75487766\dots$ (periode 3);
- $c = -1,31070264\dots$ (periode 4);
- $c = -1,96677321\dots$ (periode 6);
- $c = -1,85643807\dots$ (periode 12).

Verband met de Mandelbrotfractal

★ Beschouw een reëel periodiek punt.

1. Schrijf zijn cyclische baan neer (startend in 0).
2. Schrijf een 1 boven de kleinste waarde in de baan, een 2 boven de volgende, enzovoort.
3. Lees deze rij als een cykel van rechts naar links.

3	1	6	5	4	2
0	-1,966...	1,901...	1,648...	0,751...	-1,402...

Verband met de Mandelbrotfractal

- ★ Elke permutatie die zo optreedt, is een Gilbreathpermutatie!
- ★ Elke Gilbreathpermutatie van lengte n treedt op voor juist één cykel met periode n !

3	1	6	5	4	2
0	-1,966...	1,901...	1,648...	0,751...	-1,402...

Stelling van Zeckendorf

- ★ Elk geheel getal is op unieke manier te schrijven als een som van verschillende, niet-opeenvolgende Fibonaccigetallen.
- ★ Bijvoorbeeld: $100 = 89 + 8 + 3$.
- ★ Representatie te vinden via gretig algoritme.

Kruskal count

- ★ Paden die vanuit verschillende kaarten vertrekken hebben toch grote kans om eens op dezelfde kaart te belanden, waarna de rest van het pad samenvalt.
- ★ Dus: de goochelaar telt zijn eigen pad mee vanaf de eerste kaart en "voorspelt" zijn eigen uitkomst.
- ★ De kans dat dit werkt, blijkt zo'n 85%!

Kruskal count

- ★ Variant: woorden tellen in stuk tekst i.p.v. kaartspel.
- ★ Praktische toepassingen: "kangoeroe"-methode voor factorisatie of discrete logaritmen.

Binaire getallen

★ Zie video Numberphile, 52-Card Perfect Shuffles.

Ternaire getallen



k



$k // 3$



$k \bmod 3$

Ternaire getallen

★ Stel $n - 1 = pqr_3$ als ternaire representatie.

★ Stel m "startpositie" van gekozen kaart in stapel.

★ $m \rightarrow m // 3 + 9 \cdot r$

$$\rightarrow (m // 3 + 9 \cdot r) // 3 + 9 \cdot q$$

$$\rightarrow ((m // 3 + 9 \cdot r) // 3 + 9 \cdot q) // 3 + 9 \cdot p$$

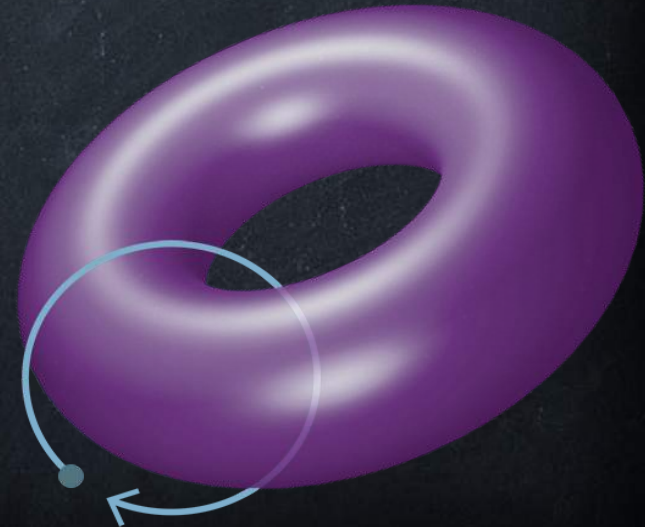
$$= m // 27 + 9 \cdot p + 3 \cdot q + r$$

$$= 9 \cdot p + 3 \cdot q + r$$

$$= n - 1.$$

Fundamentaalgroepen

- ★ Groep bij een topologische ruimte die codeert of lussen uit een vast gekozen punt al dan niet continu in elkaar om te vormen zijn.
- ★ Element in de fundamentealgroep is triviaal als en slechts als de lus “in te krimpen” is tot een enkel punt.



Fundamentaalgroepen

- ★ Intuïtief: fundamentealgroep van één solide torus wordt voortgebracht door een winding eromheen.
- ★ Voor twee losse solide tori wordt de groep voortgebracht door twee onafhankelijke generatoren. In het bijzonder is deze groep niet abels.
- ★ Voor twee solide, in elkaar gehaakte tori wordt de groep voortgebracht door twee commuterende generatoren. In het bijzonder is deze groep abels.

Fundamentaalgroepen

- ★ Het koord beschrijft een lus die overeenkomt met het element $a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$ in de fundamentealgroep.
- ★ In de eerste groep is dit woord niet reduceerbaar, en hangt het koord dus "vast" aan de tori.
- ★ In de tweede groep echter is $a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} = a \cdot a^{-1} \cdot b \cdot b^{-1} = 1$, en is het koord dus te reduceren tot een enkel punt!



Bedankt!