PUMAthematics
3 maart 2015

Oplossingen

1 Vier op een rechte

Bart heeft een winnende strategie. Een mogelijke strategie is de volgende:
We kunnen zonder verlies van algemeen veronderstellen dat Barts eerste punt $(0, 0)$ is, en Tims eerste punt $(0, 1)$. Dan kleurt Bart $(1, 0)$ als tweede punt. Als Tim tijdens zijn tweede beurt niet één van de punten $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(2, 0)$ kleurt, kiest Bart $(-1, 0)$ als derde punt en kan hij zeker $(-2, 0)$ of $(2, 0)$ als vierde punt kiezen, wat hem een *Vier op een rechte* oplevert. Kleurt Tim $(-2, 0)$, $(-1, 0)$ of $(2, 0)$ als tweede punt, dan kleurt Bart $(\frac{1}{2}, 0)$ als derde punt, en dan $(-\frac{1}{2}, 0)$ of $(\frac{3}{2}, 0)$ als vierde punt, en dan heeft hij ook een *Vier op een rechte*.

2 Onmacht in het kwadraat

Zij $n > 0$. Er geldt

$$2AB^n + AB^{2n} = A \cdot ((A^m + I)^2 - I) = ((A^m + I)^2 - I) \cdot A = 2B^n A + B^{2n} A$$

(voor zekere $m > 0$). Dus $AB^n = B^n A$ als (en slechts als) $AB^{2n} = B^{2n} A$. Per inductie volgt dat $AB = BA$ als (en slechts als) $AB^{2^n} = B^{2^n} A$. Stel nu dat $B^k = 0$. Kies n zo groot dat $2^n \geqslant k$. Dan is $AB^{2^n} = 0 = B^{2^n} A$, dus $AB = BA$.

3 Convergentieproblemen

Ja: stel $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ voor $n \geqslant 2$ en $a_1 = 0$.
$(a_n)_n$ convergeert: dit volgt uit de integraaltest, aangezien

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left[\frac{-1}{\ln x}\right]_2^\infty = \frac{1}{\ln 2} < \infty.$$

Laat $\varepsilon > 0$, dan is de rij $a_n n^\varepsilon = \frac{n^\varepsilon}{n(\ln n)^2}$ divergent. Dit volgt (bijvoorbeeld) uit de quotiëntregel en het feit dat de harmonische reeks divergeert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n^\varepsilon}{n(\ln n)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^\varepsilon} = 0.$$

4 De lift van Burj Khalifa

(a) Merk op dat $\text{ggd}(871, 1105) = 13$. De sjeik kan dus enkel verdiepingen bereiken die deelbaar zijn door 13. We tonen nu aan dat de sjeik alle verdiepingen deelbaar door 13 kan bereiken. Elk veelvoud van 13 is te schrijven als $871x + 1105y$ met $x \geqslant 0 \geqslant y$. We bewijzen per inductie op $|x|+|y|$ dat $n = 871x+1105y$ bereikbaar is zolang $0 \leqslant n < 2015$, voor $x \geqslant 0 \geqslant y$. Voor $|x| + |y| = 0$ is dit triviaal. Veronderstel dat het geldt voor $|x| + |y| = k$ en zij x en y met $|x| + |y| = k + 1$. Als $x = 0$ of $y = 0$ is het duidelijk: de sjeik hoeft dan maar op eenzelfde knopje te drukken tot hij op de gewenste verdieping arriveert. Veronderstel dus $x > 0 > y$. Omdat $871 + 1105 = 1976 \leqslant 2015$ is elke verdieping bereikbaar vanaf minstens één andere verdieping. De sjeik kan dus op verdieping $871x+1105y$ geraken vanaf verdieping $871(x - 1) + 1105y$ of $871x + 1105(y + 1)$ (afhankelijk welke van deze bestaat). Wegens de inductiehypothese zijn deze verdiepingen bereikbaar (indien ze bestaan).

We kunnen dus concluderen dat de sjeik $1+\lfloor \frac{2014}{13} \rfloor = 155$ verdiepingen kan bereiken (namelijk alle verdiepingen deelbaar door 13).

(b) Merk op dat $\text{ggd}(871, 1145) = 1$. Beschouw de gerichte graaf met als toppen de verdiepingen van de Burj Khalifa met een pijl tussen twee verdiepingen als je met één druk op een knop van de ene naar de andere kan gaan. We tonen aan dat deze graaf geen (gerichte) cykels bevat: voor een cykel die overeenkomt met a keer de gele en b keer de paarse knop (in zekere volgorde) moet gelden dat $871a - 1145b = 0$. Aangezien $\text{ggd}(871, 1145) = 1$ impliceert dit dat $871 \mid b$ en $1145 \mid a$, dus $a + b \geqslant 1145 + 871 = 2016$. Maar $a + b$ is de lengte van een cykel in een graaf met slechts 2015 toppen, contradictie.
Merk nu op dat onze graaf exact één verdieping bevat waaruit geen pijl vertrekt (verdieping 1144), één verdieping waarin geen pijl toekomt (verdieping 870) en dat in elke andere verdieping exact één pijl toekomt en één pijl vertrekt. Samen met het feit dat de graaf geen cykels bevat, impliceren deze observaties dat onze graaf bestaat uit een pad van verdieping 870 naar verdieping 1144. Dit pad passeert i.h.b. langs verdieping 0, dus de sjeik kan het gebouw verlaten.

5 Importunate permutation

Het rechterlid is gelijk aan
$$\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n} x^{k_1+k_2+\cdots+k_n}$$
waar de som loopt over alle gehele n-tupels $(k_1,\ldots,k_n)$ met $0 \leqslant k_j < j$ voor alle j. We leggen een bijectie Ψ tussen de verzameling V_n van zulke n-tupels, en de verzameling van permutaties van $(1,2,\ldots,n)$, zodanig dat $\varphi(\Psi((k_1,\cdots,k_n))) = k_1+k_2+\cdots+k_n$. Als we zo'n bijectie hebben is de opgave opgelost, vermits dan
$$\sum_{\sigma} x^{\varphi(\sigma)} = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)} x^{\varphi(\Psi((k_1,\ldots,k_n)))} = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)} x^{k_1+k_2+\cdots+k_n}.$$
Met een rotatie van $(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k)$ bedoelen we $(a_k,a_1,\ldots,a_{k-1})$. We construeren $\Psi((k_1,\cdots,k_n))$ door te vertrekken van de permutatie $(1,2,\ldots,n)$, en dan achtereenvolgens k_n rotaties toe te passen op de eerste n elementen, k_{n-1} rotaties toe te passen op de eerste $n-1$ elementen, …, k_j rotaties toe te passen op de eerste j elementen, …
(Bijvoorbeeld: dit procédé toepassen op $(0,1,1,2)$ geeft $(1,2,3,4) \to (3,4,1,2) \to (1,3,4,2) \to (3,1,2,4) \to (3,1,2,4)$, dus $\Psi((0,1,1,2)) = (3,1,2,4)$.)
Het is niet zo moeilijk om in te zien dat dit inderdaad een bijectie definieert. Er rest ons enkel nog aan te tonen dat $\varphi(\Psi((k_1,\ldots,k_n))) = k_1+k_2+\cdots+k_n$. Merk eerst op dat $\varphi(\Psi((0,\ldots,0))) = \varphi((1,2,\ldots,n)) = 0$. We zullen nu aantonen dat als het bovenstaande procédé wordt toegepast op σ, de waarde van $\varphi(\sigma)$ in de $n+1-j$-de stap (waar we k_j rotaties toepassen op de eerste j elementen) toeneemt met k_j. Merk daartoe op dat voor de $n+1-j$-de stap, σ er als volgt uit ziet:
$$(a_{k+1},\ldots,a_{j-1},a_j,a_0,a_1,\ldots,a_{k-1},a_k,b_1,b_2,\ldots)$$
waarbij $a_0 < a_1 < \ldots < a_j$ (dit valt eenvoudig inductief in te zien). Uit deze vorm ziet men onmiddelijk dat elke opeenvolgende rotatie van de eerste j elementen $(a_{k+1},\ldots,a_{j-1},a_j,a_0,a_1,\ldots,a_{k-1})$ er voor zal zorgen dat $\varphi(\sigma)$ met 1 toeneemt.

6 Unitaire delegatie

Noem $m_N = \min_{n\in[\sqrt{N},N]} a_n$. Zij $N > 0$ willekeurig. We bewijzen per inductie dat $a_n \geqslant m_N$ voor $n \geqslant \sqrt{N}$. Voor $n \in [\sqrt{N},N]$ is dit triviaal. Veronderstel dat het geldt voor $\lceil\sqrt{N}\rceil,\ldots,N,\ldots,n$. Als n niet priem is, is $d_n \geqslant \sqrt{n} \geqslant \sqrt{N}$ en dus $a_{n+1} = \frac{d_n^5 a_n + a_{d_n}}{d_n^5+1} \geqslant m_N$ wegens de inductiehypothese toegepast op n en d_n. Als n wel priem is, is $a_{n+1} = \frac{a_n+1}{2} \geqslant a_n \geqslant m_N$.

Bijgevolg is ook $m_{N+1} \geqslant m_N$, m.a.w., de rij (m_n) is stijgend. Het volstaat om aan te tonen dat $m_n \to 1$.

Zij p een priemgetal. We bewijzen per inductie dat $a_{p+n} \geqslant \left(1 - \frac{1}{p^{5/2}}\right)^{n-1} \frac{m_p+1}{2}$ voor $n \geqslant 1$. Voor $n = 1$ zegt dit $a_{p+1} \geqslant \frac{m_p+1}{2}$. Dit klopt aangezien $a_{p+1} = \frac{a_p+1}{2}$ en $a_p \geqslant m_p$. Veronderstel dat het geldt voor n. Als $p+n$ priem is, is $a_{p+n+1} = \frac{a_{p+n}+1}{2} \geqslant \frac{m_p+1}{2}$ en volgt het gevraagde omdat $1 - \frac{1}{p^{5/2}} < 1$. Als $p+n$ niet priem is schrijven we $a_{p+n+1} \geqslant a_{p+n}\left(1 - \frac{1}{d_{p+n+1}^5}\right)$. Omdat $1 - \frac{1}{x}$ stijgend is en $d_{p+n} \geqslant \sqrt{p+n} \geqslant \sqrt{p}$, volgt $a_{p+n+1} \geqslant a_{p+n}\left(1 - \frac{1}{p^{5/2}}\right)$.

Neem nu een rij priemgetallen (p_n) waarvoor $p_n^2 < p_{n+1} < 2p_n^2$. Deze bestaat wegens het Postulaat van Bertrand. Wegens het voorgaande is

$$m_{p_{n+1}} \geqslant \left(1 - \frac{1}{p_n^{5/2}}\right)^{p_{n+1}-p_n-1} \frac{m_{p_n}+1}{2}.$$

Hieruit volgt per inductie dat

$$m_{p_{n+k}} \geqslant \sum_{l=1}^{k} 2^{-l} \prod_{j=k-l}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{p_{n+j}^{5/2}}\right)^{p_{n+j+1}-p_{n+j}-1}$$

voor $k \geqslant 1$. Zij $0 < \varepsilon < 1$. Omdat $\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{x^{5/2}}\right)^{x^2} = 1$ en

$$\left(1 - \frac{1}{p_n^{5/2}}\right)^{2p_n^2} \leqslant \left(1 - \frac{1}{p_n^{5/2}}\right)^{p_{n+1}-p_n-1} \leqslant 1$$

is ook $\left(1 - \frac{1}{p_n^{5/2}}\right)^{p_{n+1}-p_n-1} > 1 - \varepsilon$ voor alle $n \geqslant N$ voor zekere N. Dan is

$$m_{p_{N+k}} \geqslant \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^l.$$

Als $k \to \infty$ nadert dit naar $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$. We vinden dus $k \geqslant 1$ met $m_{p_{N+k}} \geqslant \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} - \varepsilon$. Omdat ε willekeurig was, vinden we $m_{p_{N+k}}$ willekeurig dicht bij 1. Omdat (m_n) stijgend is, is $m_n \to 1$, en dus ook $a_n \to 1$.