PUMAthematics

3 maart 2015

Wedstrijdreglement

(a) De competitie bevat zes vragen, die elk op evenveel punten staan. Indien een vraag uit twee delen bestaat, staan beide delen op evenveel punten. Je krijgt 150 minuten de tijd om zo veel mogelijk vragen op te lossen.

(b) Handboeken, rekenmachines, gsm's en andere hulpmiddelen zijn hierbij niet toegestaan. Enkel pen en papier mogen gebruikt worden.

(c) Vermeld op ieder ingediend blad duidelijk je naam, jaar en richting, alsook het volgnummer van de vraag. Werk op elk blad maar aan één vraag.

(d) Bij verdere vragen of betwistingen is uitsluitend de jury bevoegd.

(e) Door deel te nemen aan de PUMA 2015 verklaart men zich akkoord met dit reglement.

De proclamatie van deze wedstrijd gaat door op vrijdag 13 maart 2015 om 13.00h in gebouw S9, auditorium A3. Wil je weten naar wie de 60 euro prijzengeld gaat, beschouw dit dan gerust als een uitnodiging. Zoals vorig jaar combineren we de proclamatie met een pizzafestijn. Wil je een pizza bestellen, dan kan je dat op voorhand (voor woensdagavond 11 maart) op onze website ingeven. Verdere informatie verschijnt tijdig op onze website: http://prime.ugent.be.

Vragen

1 Vier op een rechte

Bart en Tim spelen een spelletje *Vier op een Rechte*. Ze kiezen elk om beurt een (nog niet eerder gekozen) punt in het vlak $\mathbb{R}^2$, en kleuren dat in hun persoonlijke kleur. Een *Vier op een Rechte* bestaat uit vier verschillende punten P_1, P_2, P_3, P_4 van dezelfde kleur, gelegen op één rechte, zo dat hun onderlinge afstanden $|P_1P_2|$, $|P_2P_3|$, $|P_3P_4|$ gelijk zijn. De speler die als eerste een *Vier op een Rechte* van zijn kleur kan vormen, wint het spel. Bart begint. Bestaat er een winnende strategie voor één van de spelers, en zo ja, welke?

2 Onmacht in het kwadraat

Zij A en B reële vierkante matrices van gelijke grootte zo dat voor elk natuurlijk getal $n > 0$ er een $m > 0$ bestaat waarvoor $(B^n + I)^2 = (A^m + I)^2$. Veronderstel dat B nilpotent is, d.w.z. $B^k = 0$ voor zekere $k > 0$. Bewijs dat $AB = BA$.

3 Convergentieproblemen

Bestaat er een reële rij $(a_n) \geqslant 0$ waarvoor de reeks $\sum a_n$ convergeert maar $\sum a_n n^{\varepsilon}$ divergeert voor alle $\varepsilon > 0$?

4 De lift van Burj Khalifa

De Burj Khalifa, een gebouw van maar liefst 2015 verdiepingen (gelijkvloers inclusief), heeft een lift met twee knopjes: met de gele knop kan je 871 verdiepingen omhoog gaan, met de paarse knop kan je 1105 verdiepingen omlaag gaan. De lift ontploft indien die hoger of lager probeert te gaan dan mogelijk is. Op elke verdieping bevindt zich een kamelenwinkel. Een sjeik bevindt zich op het gelijkvloers en wil kamelen kopen.

(a) Hoeveel verdiepingen kan hij bezoeken zonder te crashen met de lift?

Wanneer de sjeik na een bezoekje op de 871$^{\text{ste}}$ verdieping terug in de lift stapt doet zich een aardbeving voor. De aardschok doet de lift één verdieping zakken en veroorzaakt een defect dat er voor zorgt dat dat de paarse knop vanaf nu de lift 1145 verdiepingen omlaag brengt.

(b) Kan de sjeik de Burj Khalifa verlaten (door op het gelijkvloers uit de lift te stappen)?

We beschouwen het gelijkvloers als de 0$^{\text{de}}$ verdieping. De sjeik mag zich enkel verplaatsen met behulp van de lift.

5 Importunate permutation

Voor een permutatie σ van $\{1, 2, \ldots, n\}$ definiëren we

$$\varphi(\sigma) = \sum_{\substack{k \text{ waarvoor} \\ \sigma_k > \sigma_{k+1}}} k\,.$$

Bewijs dat

$$\sum_{\sigma} x^{\varphi(\sigma)} = (1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+\cdots+x^{n-1})$$

waarbij de som loopt over alle permutaties van $\{1, 2, \ldots, n\}$.

6 Unitaire delegatie

Pafnoeti Tsjebysjev bewees in 1850 het zogenaamde postulaat van Bertrand, dit is de volgende bewering:

Voor elk natuurlijk getal $n > 1$ bestaat er een priemgetal p zo dat $n < p < 2n$.

Je mag deze stelling zonder bewijs aannemen. Noteer voor een natuurlijk getal $n > 1$ d_n voor de grootste echte deler van n. Bijvoorbeeld: $d_4 = 2$, $d_5 = 1$ en $d_6 = 3$. Definieer de rij (a_n) door $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ en

$$a_n = \frac{d_{n-1}^5 a_{n-1} + a_{d_{n-1}}}{d_{n-1}^5 + 1}$$

voor $n \geqslant 3$. Bewijs dat $a_n \to 1$.