Vrije Universiteit Brussel

Een algebraïsche ontknoping

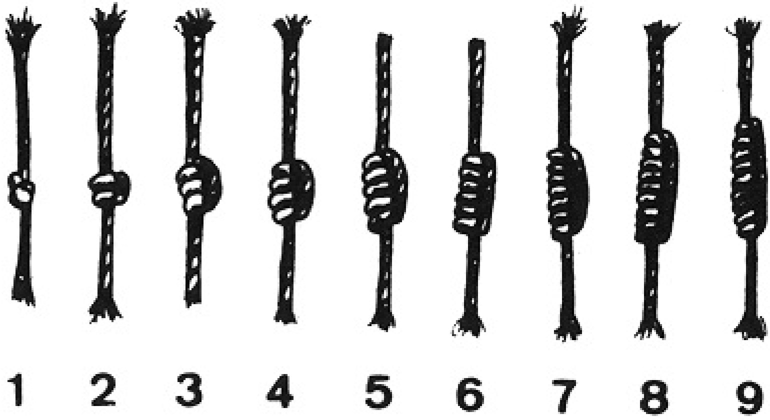
Over knoopinvarianten en de Jones polynoom

Kenny De Commer (VUB, Brussel)

17 november 2015

Outline

Quipu's

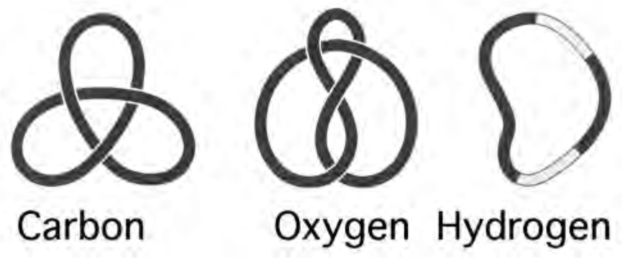


Keltische knopen

Book of Kells, 8ste - 9de eeuw AD

Zeemansknopen

Thomson's vortex-atomen-theorie



Tait and Maxwell

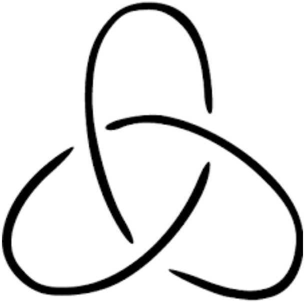
P.G. Tait, On knots, *Trans. R. Soc. Edinburgh* **28** (1877), 145–190.

Clear your coil of kinkings
Into perfect plaiting,
Locking loops and linkings
Interpenetrating.

Why should a man benighted,
Beduped, befooled, besotted,
Call knotful knittings plighted,
Not knotty but beknotted?

Wat is een knoop? Wat is een link?

Klaverbladknoop



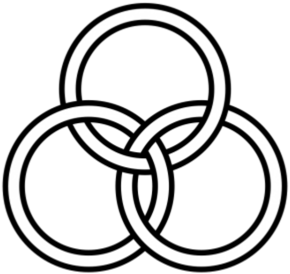
Klaverbladknoopdiagram

Definitie

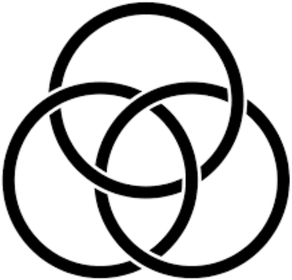
Knoop = *inbedding van* S^1 *in* $\mathbb{R}^3$ *op 'ambiënte isotopie' na.*

Knoopdiagram = *projectie van een knoop in het vlak.*

Wat is een knoop? Wat is een link?



Borromeaanse ringen



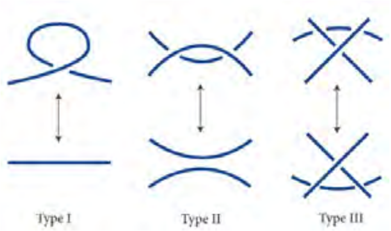
Borromeaans diagram

Definitie

Link $=$ *inbedding van* $S^1 \sqcup \ldots \sqcup S^1$ *in* $\mathbb{R}^3$ *op 'ambiënte isotopie' na.*

Linkdiagram $=$ *projectie van een link in het vlak.*

Reidemeister bewegingen



Reidemeister bewegingen

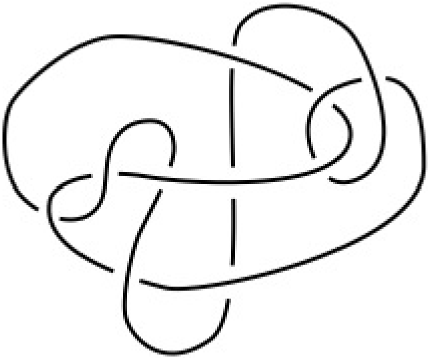
Stelling (Reidemeister (1926))

Twee linkdiagrammen geven zelfde link

$$\Leftrightarrow$$

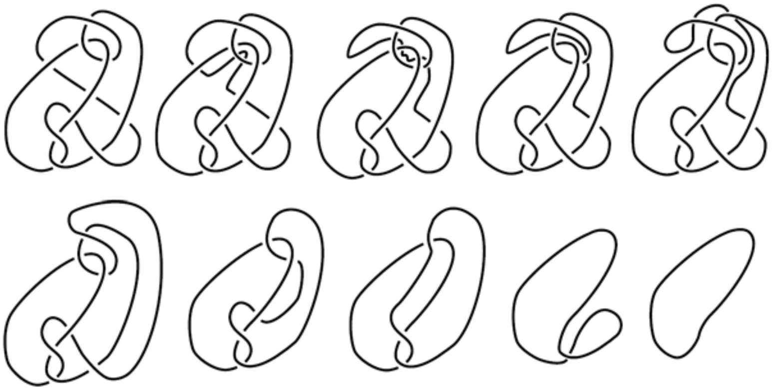
één vervormt tot ander via Reidemeister bewegingen.

‘Millett’s culprit’



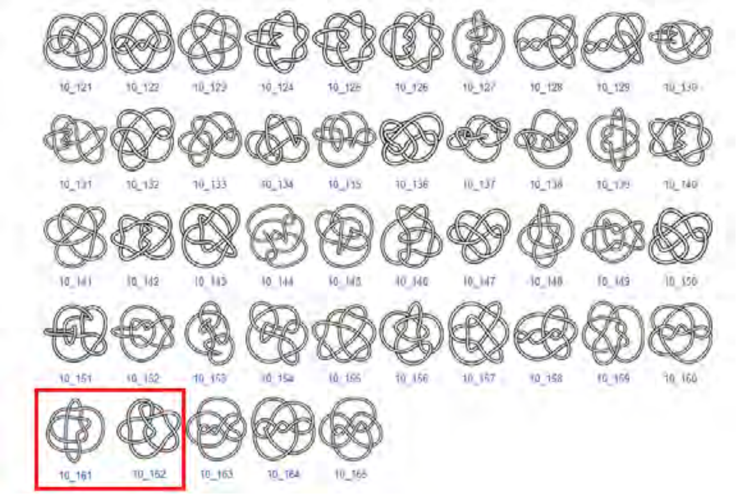
Deze knoop is niet verknoopt!

‘Millett’s culprit’



Kauffman’s ontknoping

Het ‘Perko paar’



De knopentabel van Rolfsen

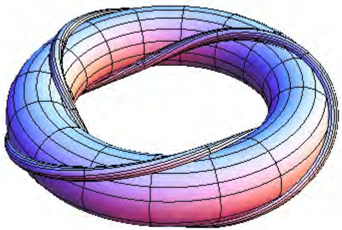
Dehn groep

Definitie

Als $K \subseteq S^3$*, dan Dehn groep* $\pi_1(S^3 \setminus K)$*.*

Voorbeeld

Als K *klaverbladknoop:* $\pi_1(S^3 \setminus K) = \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$*.*

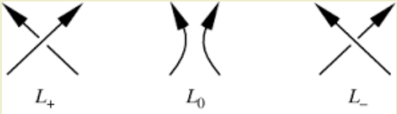


Alexander polynoom

Definitie (Alexander polynoom (1928))

Knoop $K \underset{\text{'homologie'}}{\Rightarrow}$ *Laurent polynoom* $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Stelling (Alexander-Conway ontwarringsrelatie)



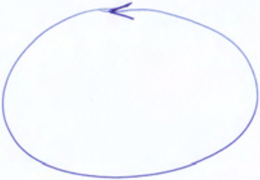
$$\Delta_O(t) = 1, \quad \Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta_{L_0}(t).$$

$\rightsquigarrow$ Georiënteerde link-invariant $\Delta_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$...

$\rightsquigarrow$ onderscheidt spiegelbeelden niet...

Voorbeeld: de klaverbladknoop

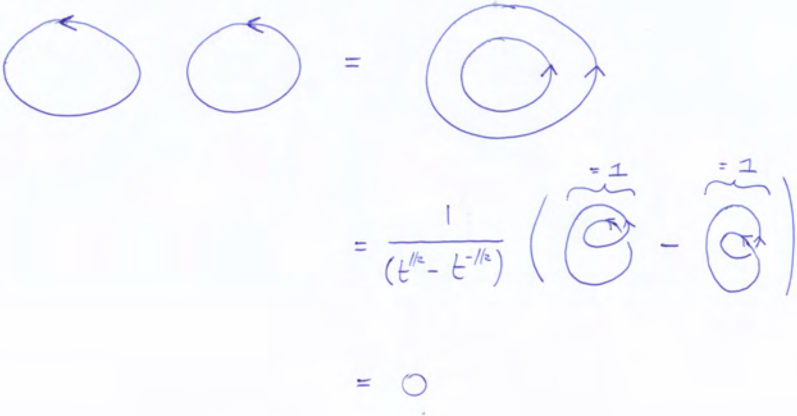
AP triviale knoop



$= 1$

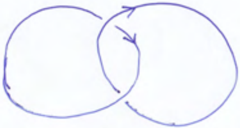
Voorbeeld: de klaverbladknoop

AP triviale link

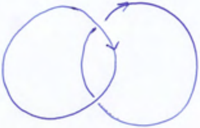


Voorbeeld: de klaverbladknoop

AP verstrengelde link



$=$



$-\,(t^{1/2}-t^{-1/2})$

$$= -\,(t^{1/2} - t^{-1/2})$$

Voorbeeld: de klaverbladknoop

AP klaverbladknoop

$=$

$- (t^{1/2} - t^{-1/2})$

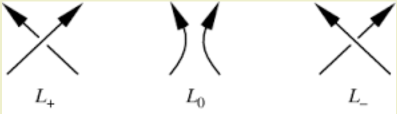
$$= 1 + (t^{1/2} - t^{-1/2})^2$$

$$= t - 1 + t^{-1}$$

Ontwarringsrelaties voor de Jones polynoom

Stelling

Er bestaat een knopeninvariant $V_K(t)$ *zodat*



$$V_O(t) = 1, \quad t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t).$$

$\rightsquigarrow$ onderscheidt spiegelbeelden!

$\rightsquigarrow$ onderscheidt knopen? Open probleem!

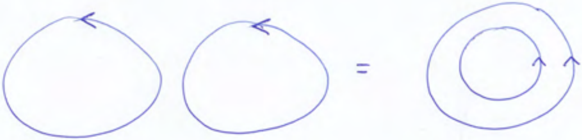
Voorbeeld: de klaverbladknoop

JP triviale knoop

$= 1$

Voorbeeld: de klaverbladknoop

JP triviale link



$$= \frac{1}{(t^{1/2} - t^{-1/2})}\left(t^{-1}\right.$$  $$- t$$  $$\left.\right)$$

$$= \frac{t^{-1} - t}{t^{1/2} - t^{-1/2}}$$

$$= -\left(t^{1/2} + t^{-1/2}\right)$$

Voorbeeld: de klaverbladknoop

JP verstrengelde link

 $= t^{-1}\Big(t^{-1}$  $-\,(t^{1/2}-t^{-1/2})$  $\Big)$

$$= -t^{-2}(t^{1/2}+t^{-1/2}) - t^{-1}(t^{1/2}-t^{-1/2})$$

$$= -t^{-3/2}(t^{-1}+t)$$

Voorbeeld: de klaverbladknoop

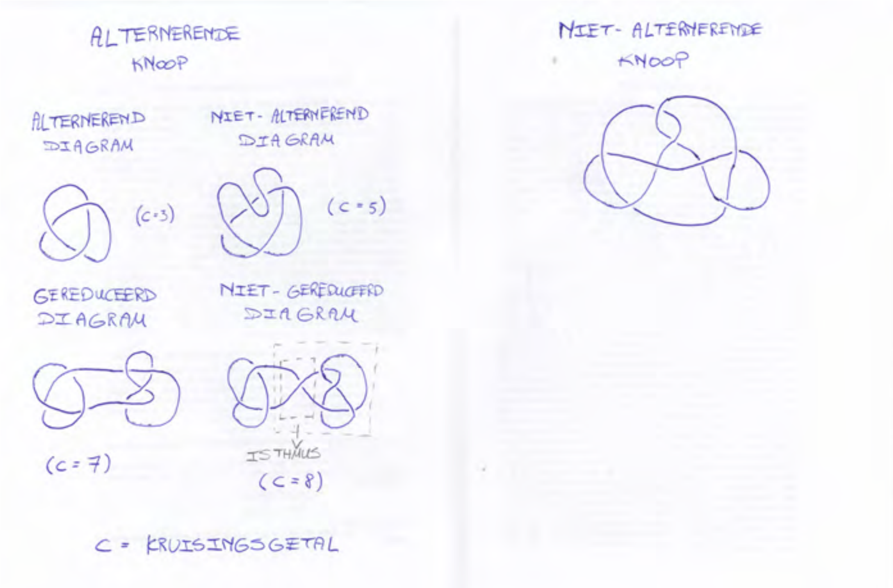
JP klaverbladknoop

$= t^{-1}$ (t^{-1}  $-\,(t^{1/2}-t^{-1/2})$ )

$$= t^{-2} + t^{-5/2}\,(t^{-1}+t)\,(t^{1/2}-t^{-1/2})$$

$$= t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$$

Alternerende knopen en gereduceerde diagramma



Tait's conjectuur

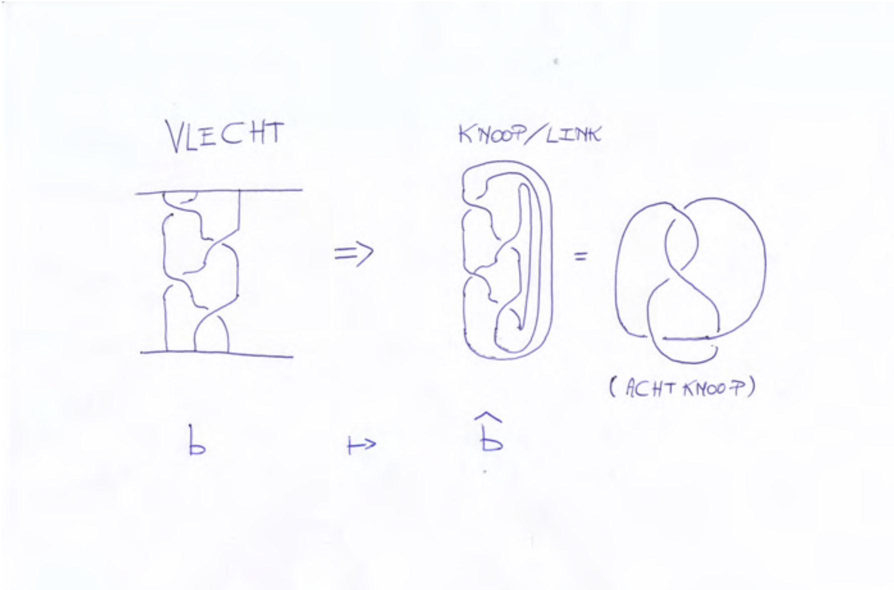
Stelling (Eerste conjectuur van Tait (1877), bewezen door Kauffman (1988), Thistlethwaite (1987) en Murasugi (1987))

Zij K alternerende knoop.

- *Elk gereduceerd alternerend diagram zelfde kruisingsgetal.*
- *Minimale kruisingsgetal voor alle diagramma.*

$\rightsquigarrow$ Bewijs maakt essentieel gebruik van Jones polynoom!

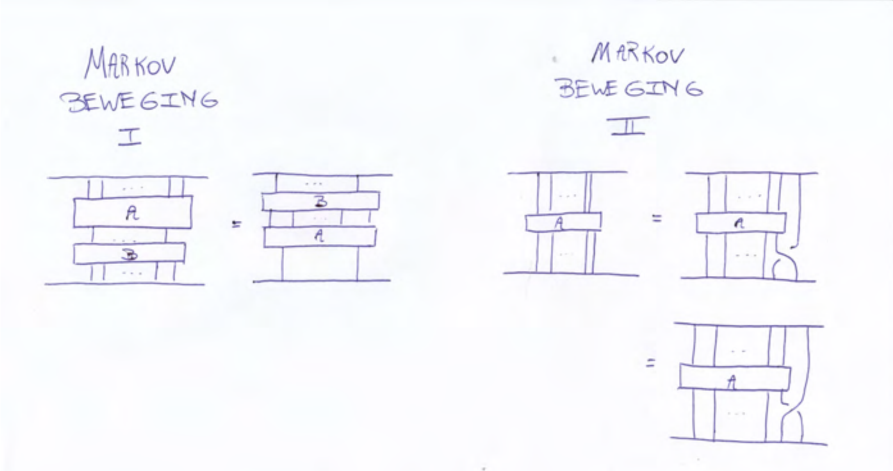
Vlechten en knopen



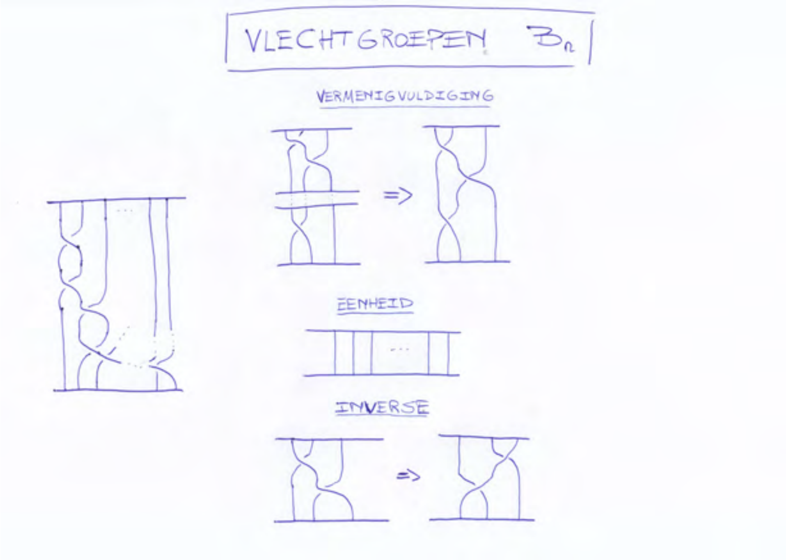
Markov bewegingen

Stelling (Markov)

Twee vlechten zelfde link ⇔ verbonden via Markov bewegingen.



Vlechtgroepen



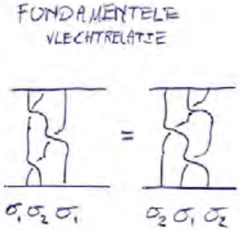
Presentatie van vlechtgroepen

Stelling (Artin, 1926)

Vlechtgroep B_n is universeel voor

1. *generatoren $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ en*
2. *relaties*

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, & |i-j| \geq 2, \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, & 1 \leq i < n, \\ \sigma_i\sigma_{i-1}\sigma_i = \sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i-1}, & 1 < i \leq n. \end{cases}$$



Verstrengelde algebra

Lemma (Basislemma)

Zijn gegeven $t^{1/2} \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ *en*

1. *unitale* $\mathbb{C}$*-algebra's* $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$
2. *functionalen* ϕ_n *op* A_n*,*
3. *elementen* $\widetilde{\sigma}_i \in A_n$ *voor* $1 \leq i \leq n$*.*

zodat

1. $\sigma_i \mapsto \widetilde{\sigma}_i$ *is een presentatie van* B_n*,*
2. $\phi_n(1) = 1$*,*
3. $\phi_n(a\widetilde{\sigma}_i) = \phi_n(\widetilde{\sigma}_i a)$ *voor alle* $1 \leq i \leq n$ *en alle* $a \in A_n$*,*
4. $\phi_{n+1}(b\widetilde{\sigma}_{n+1}^{\pm 1}) = \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \phi_n(b)$ *voor alle* $b \in A_n$*.*

Dan $K = \hat{b}_n \mapsto \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right)^{n-1} \phi_n(b_n)$ *knopeninvariant.*

Verstrengelde algebra II

Algebra's A_n:

1. Vectorruimte $\mathbb{C}^2$: basis e_+, e_-.
2. Vectorruimte $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{C}^2$: basis $e_{\mu_1,\ldots,\mu_n}$.
3. $A_n = B\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{C}^2\right)$ met

$$A_n \hookrightarrow A_{n+1}, \quad X \mapsto X \otimes 1.$$

Verstrengelde algebra II

Representatie:

1. Zij $\mathscr{R} : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ met

$$\begin{aligned} \mathscr{R}e_{++} &= t^{-\frac{1}{2}}e_{++}, & \mathscr{R}e_{--} &= t^{-\frac{1}{2}}e_{--}, \\ \mathscr{R}e_{-+} &= te_{+-}, & \mathscr{R}e_{+-} &= (t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{3}{2}})e_{+-} + te_{-+}. \end{aligned}$$

2. Zij $\widetilde{\sigma}_i = \mathscr{R}_{i,i+1}$ met

$$\mathscr{R}_{i,i+1} : \mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2}_{i,i+1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2}_{i,i+1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2.$$

3. Dan $\widetilde{\sigma}_i\widetilde{\sigma}_{i\pm1}\widetilde{\sigma}_i = \widetilde{\sigma}_{i\pm1}\widetilde{\sigma}_i\widetilde{\sigma}_{i\pm1}$!

Verstrengelde algebra II

Functionalen:

1. Zij $Ke_+ = t^{-\frac{1}{2}}e_+$ en $Ke_- = t^{\frac{1}{2}}e_-$.
2. Zij $K_n = K \otimes K \otimes \ldots \otimes K$.
3. Zij
$$\phi_n(X) = (t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})^{-n}\mathrm{Tr}(XK_n).$$

$\rightsquigarrow$ Deze data voldoen aan alle condities van het basislemma...

$\rightsquigarrow$ Deze data geeft de Jones knopenpolynoom!

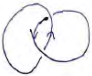
Voorbeelden

$$\mathcal{R} = \begin{array}{c|cccc} & -- & -+ & +- & ++ \\ \hline -- & t^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ -+ & 0 & 0 & t^{-1} & 0 \\ +- & 0 & t^{-1} & t^{-1/2}-t^{-3/2} & 0 \\ ++ & 0 & 0 & 0 & t^{-1/2} \end{array}$$

$$K \otimes K = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

$$V_{\bigcirc}(t) =$$
$$(t^{1/2}+t^{-1/2})^{-1}\left(t \cdot t^{-1/2} + 1\cdot 0 + 1\cdot(t^{-1/2}-t^{-3/2}) + t^{-1}t^{-1/2}\right)$$
$$= (t^{1/2}+t^{1/2})^{-1}(t^{1/2}+t^{-1/2})$$
$$= 1$$

$$\mathcal{R}^2 = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-2} & t^{-3/2}-t^{-5/2} & 0 \\ 0 & t^{-3/2}-t^{-5/2} & t^{-1}-t^{-2}+t^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

$$V_{\bigcirc\!\!\bigcirc}(t)$$
$$= (t^{1/2}+t^{-1/2})^{-1}(t^{-2}+t^{-2}+t^{-1}-t^{-2}+t^{-3}+1)$$
$$= t^{-3/2}(t+t^{-1})$$

$$\mathcal{R}^3 = \begin{pmatrix} t^{-3/2} & & & \\ & t^{-5/2}-t^{-7/2} & & \\ & & t^{-3/2}-t^{-5/2}+t^{-7/2}-t^{-9/2} & \\ & & & t^{-3/2} \end{pmatrix}$$

$$V(t)$$
$$= (t^{1/2}+t^{-1/2})(t^{-1/2}+t^{-3/2}-t^{-9/2}+t^{-5/2})$$
$$= t^{-1}+t^{-3}-t^{-4}$$

Operatoren op Hilbert ruimtes

Hilbert ruimte $\mathcal{H} = \{\xi, \eta, \ldots\}$,

$$\langle \xi, \eta \rangle \in \mathbb{C}.$$

Voorbeeld: $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ en

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{f(n)} g(n).$$

Definitie

$B(\mathcal{H})$: *afbeeldingen* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *zodat*

$$\exists T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}, \quad \langle \xi, T\eta \rangle = \langle T^*\xi, \eta \rangle.$$

$\rightsquigarrow$ $B(\mathcal{H})$ is unitale *-algebra van begrensde, lineaire operatoren.

Commutatie

Definitie

Operatoren $S, T \in B(\mathcal{H})$ commuteren:

$$ST = TS.$$

Definitie (Commutant)

Zij $\mathscr{S} \subseteq B(\mathcal{H})$. Dan

$$S' = \{T \in B(\mathcal{H}) \mid TS = ST, \quad \forall S \in \mathscr{S}\}.$$

Definitie (Projectie-operatoren)

$e = e^* = e^2 \in B(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \mathcal{G} = e\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}.$

von Neumann algebra's

Definitie (von Neumann algebra)

von Neumann algebra: unitale *-algebra $M \subseteq B(\mathcal{H})$ zodat

$$M = M''.$$

Factoren

Definitie (Factor)

Factor: von Neumann algebra M met

$$M \cap M' = \mathbb{C}.$$

II_1-factor: (∞-dim.) factor met een positief spoor $\tau : M \to \mathbb{C}$,

$$\tau \ lineair, \ \tau(1) = 1, \ \tau(a^*a) \geq 0, \ \tau(ab) = \tau(ba), \ \forall a, b \in M.$$

Groepsfactoren

Voorbeeld

Γ *een* *groep:*

$$\lambda_g : l^2(\Gamma) \to l^2(\Gamma), \quad (\lambda_g f)(h) = f(g^{-1}h).$$

Dan

1. $L(\Gamma) = \{\lambda_g \mid g \in \Gamma\}''$ *von Neumann algebra,*
2. *spoor:* $\tau(\lambda_g) = \delta_{g,e} = \langle \delta_e, \lambda_g \delta_e \rangle$.
3. *Als* Γ *oneindige conjugatieklassen: factor van type* II_1*!*

$\rightsquigarrow$ Open probleem: $L(\mathbb{F}_2) = L(\mathbb{F}_3)$?

$\rightsquigarrow$ $L(\Gamma) \Rightarrow \Gamma$: S. Vaes (KU Leuven) Francqui-prijs 2015! 

Continue dimensie

Definitie (Dimensiefunctie)

II_1-factor $M \subseteq B(\mathcal{H})$: $\dim_M(\mathcal{H}) \in (0, \infty]$.

Definitie

II_1-factor M: Hilbert ruimte $L^2(M)$ via

$$\langle a, b\rangle = \tau(a^* b).$$

Dan voor $m \in M$:

$$m : L^2(M) \to L^2(M), \quad n \mapsto mn,$$

$$m' : L^2(M) \to L^2(M), \quad n \mapsto nm.$$

$\rightsquigarrow e \in \mathscr{P}(M) \Rightarrow \dim_M(e) := \dim_M(L^2(M)e)$.

Voorbeeld: oneindig tensor product

Voorbeeld

$$M = M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \ldots,$$

$$\tau = \mathrm{tr} \otimes \mathrm{tr} \otimes \mathrm{tr} \otimes \ldots$$

met

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a+d).$$

$$\dim_M \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \ldots \right) = \frac{1}{2^n}.$$

Subfactoren

Definitie

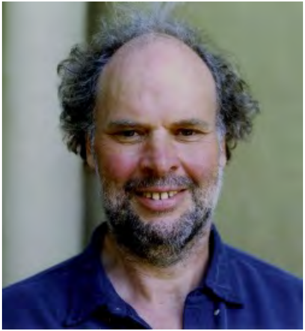
Subfactor: (unitale) inclusie $N \subseteq M$ van type II_1-factoren.

Definitie (Index)

$N \subseteq M$ *eindige index als* $[M : N] := \dim_N(L^2(M)) < \infty$.

$N \subseteq M$ eindige index $\Rightarrow N' \cap M$ eindigdimensionale algebra.

Een hint van het mysterie



Stelling (Jones, 1983)

Zij $N \subseteq M$ een subfactor. Dan

$$[M : N] \in \{4\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \mid n = 3, 4, 5, \dots\} \cup [4, +\infty].$$

De Jones constructie

Definitie

$N \subseteq M$ *subfactor:*

$$M_1 = \{n' \mid n \in N\}' \subseteq B(L^2(M)).$$

Lemma

1. $N \subseteq M$ *subfactor* $\Rightarrow$ $M \subseteq M_1$ *subfactor.*
2. $[M : N] = [M_1 : M]$.

De Jones toren

Definitie

$N \subseteq M$ *subfactor:* *Jones toren*

$$N = M_{-1} \subseteq M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$$

Jones projecties

Definitie

$N \subseteq M$ *subfactor: Jones projectie*

$$e_n : L^2(M_{n-1}) \to L^2(M_{n-2}) \subseteq L^2(M_{n-1}).$$

Lemma

$N \subseteq M$ *subfactor met* $[M : N] < \infty$.

- $e_n e_{n\pm1} e_n = [M : N]^{-1} e_n$.
- $\tau(x e_n) = [M : N]^{-1} \tau(x)$ *voor* $x \in M_{n-1}$.

De cirkel is rond

$N \subseteq M$ subfactor met $[M : N] < \infty$.

- Neem $t \in \mathbb{C}$ zodat $\frac{1}{t}(1+t)^2 = [M : N]$.
- Stel $A_n = M_n$.
- Spoor $\tau : M_n \to \mathbb{C}$.
- Representatie

$$\sigma_i \mapsto \widetilde{\sigma}_i = -\sqrt{t}(te_i - (1 - e_i)).$$

$\Rightarrow$ Dit voldoet aan al de condities van het basislemma!