Analyse met infinitesimalen

Hans Vernaeve

PRIME voordracht

Infinitesimalen in de 17de en 18de eeuw

- Infinitesimalen = oneindig kleine getallen.
- Gebruikt in de differentiaalrekening van Newton en Leibniz.
- Hulpmiddel om eigenschappen van functies aan te tonen.
- Bestaan van infinitesimalen en hun eigenschappen berusten op "fysische intuïtie".

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,

EDITIO NOVA.

TOMUS PRIMUS.

LUGDUNI,

Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1748

Voorbeeld: de afgeleide van e^x

Voor een infinitesimaal dx geldt:

$$\begin{aligned}
\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} \\
&= \frac{e^x(e^{dx} - 1)}{dx} \\
&= e^x \, \frac{1 + dx + \frac{dx^2}{2} + \cdots - 1}{dx} \\
&= e^x(1 + \tfrac{dx}{2} + \cdots) = e^x
\end{aligned}$$

Voorbeeld: de afgeleide van e^x

Voor een infinitesimaal dx geldt:

$$\begin{aligned}
\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} \\
&= \frac{e^x(e^{dx} - 1)}{dx} \\
&= e^x \, \frac{1 + dx + \frac{dx^2}{2} + \cdots - 1}{dx} \\
&= e^x(1 + \tfrac{dx}{2} + \cdots) = e^x
\end{aligned}$$

- eerste lijn: we delen door dx, dus $dx \neq 0$

Voorbeeld: de afgeleide van e^x

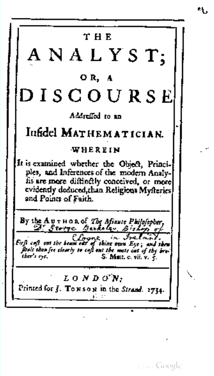
Voor een infinitesimaal dx geldt:

$$\begin{aligned}
\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} \\
&= \frac{e^x(e^{dx} - 1)}{dx} \\
&= e^x \, \frac{1 + dx + \frac{dx^2}{2} + \cdots - 1}{dx} \\
&= e^x(1 + \tfrac{dx}{2} + \cdots) = e^x
\end{aligned}$$

- eerste lijn: we delen door dx, dus $dx \neq 0$
- laatste lijn: we verwaarlozen dx, dus $dx = 0$

Kritiek op infinitesimalen

They are neither finite Quantities, nor Quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them the Ghosts of departed Quantities?



THE
ANALYST;
OR, A
DISCOURSE
Addressed to an
Infidel MATHEMATICIAN.
WHEREIN
It is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith.

By the AUTHOR of *The Minute Philosopher.*
Dr George Berkeley, Bishop of Cloyne in Ireland.

First cast out the beam out of thine own Eye; and then shalt thou see clearly to cast out the mote out of thy brother's eye. S. Matt. c. vii. v. 5.

LONDON:
Printed for *J.* TONSON in the *Strand.* 1734.

Bisschop George Berkeley, *The Analyst*, 1734.

Gottfried Wilhelm von Leibniz

(brief aan Varignon, 1702):

• *Aan het getallenstelsel moeten oneindig kleine en oneindig grote ideale elementen toegevoegd worden*

• *In het uitgebreide getallenstelsel moeten dezelfde rekenkundige wetten gelden als in het gewone stelsel*

Voorbeeld: de afgeleide van e^x

Voor een infinitesimaal dx geldt:

$$\begin{aligned}\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} \\ &= \frac{e^x(e^{dx} - 1)}{dx} \\ &= e^x \, \frac{1 + dx + \frac{dx^2}{2} + \cdots - 1}{dx} \\ &= e^x(1 + \tfrac{dx}{2} + \dots) = e^x\end{aligned}$$

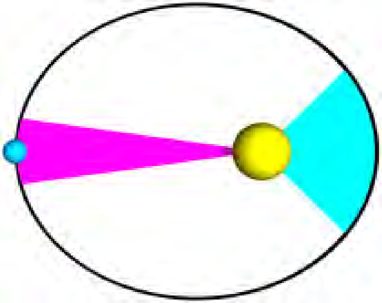
Voorbeeld: de afgeleide van e^x

Voor een infinitesimaal $dx \neq 0$ geldt:

$$\begin{aligned}
\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} \\
&= \frac{e^x(e^{dx} - 1)}{dx} \\
&= e^x \, \frac{1 + dx + \frac{dx^2}{2} + \cdots - 1}{dx} \\
&= e^x(1 + \tfrac{dx}{2} + \dots) \approx e^x
\end{aligned}$$

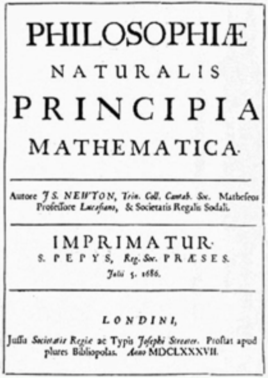
Leibniz: gelijkheden zijn *op infinitesimalen na*

Voorbeeld: de wet der perken



Gelijke oppervlakken in gelijke tijden (Kepler)

Voorbeeld: de wet der perken



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

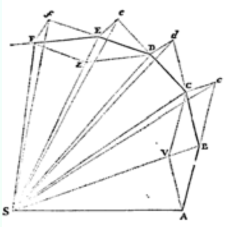
Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

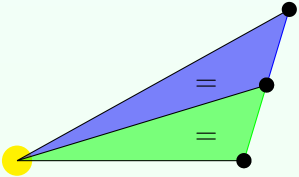
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Isaac Newton, *Principia Mathematica*, 1686

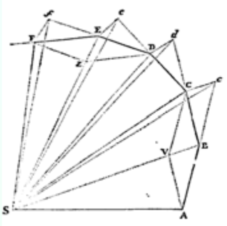
Voorbeeld: de wet der perken

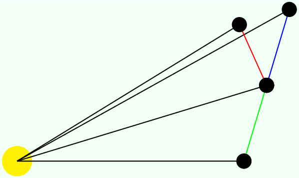




Tijd: $+dt$ $+dt$ zonder zwaartekracht

Voorbeeld: de wet der perken

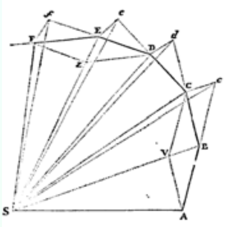


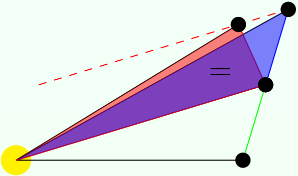


Tijd: $+dt$ $\quad$ $+dt$ zonder zwaartekracht

$+dt$ met zwaartekracht

Voorbeeld: de wet der perken

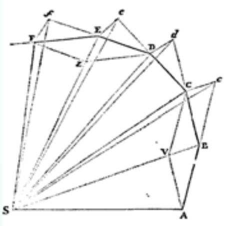


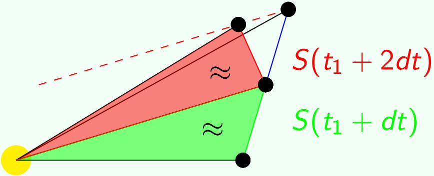


Tijd: $+dt$ $\quad$ $+dt$ zonder zwaartekracht

$+dt$ met zwaartekracht

Voorbeeld: de wet der perken





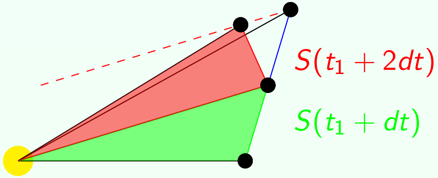
Tijd: $+dt$ $\quad$ $+dt$ zonder zwaartekracht

$+dt$ met zwaartekracht

Voorbeeld: de wet der perken

$$
\begin{array}{ccccccccc}
S(t_2) & = & S(t_1+dt) & + & S(t_1+2dt) & + & \cdots & + & S(t_1+Ndt) \\
\overset{?}{\approx} & & = & & \approx & & & & \overset{?}{\approx} \\
NS(t_1+dt) & = & S(t_1+dt) & + & S(t_1+dt) & + & \cdots & + & S(t_1+dt)
\end{array}
$$

met N zo groot dat $Ndt = t_2 - t_1$.

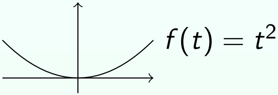


Tijd: $+dt$ $+dt$ zonder zwaartekracht

$+dt$ met zwaartekracht

Problemen met infinitesimalen

Vergelijk met:



$t^2 \neq 0$
maar toch is $0^2 = 0$, $(dt)^2 \approx 0$, $(2dt)^2 \approx 0$, $\ldots$, $(t + dt)^2 \approx t^2$, $\ldots$

(geen bewijs door volledige inductie?)

Problemen met infinitesimalen

Voorbeeld

Gegeven functies $f(x)$, $x(t)$ (en dus ook $(f \circ x)(t) = f(x(t))$):

1. Symbolisch is
$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$
en inderdaad is $(f \circ x)'(t) = f'(x(t))x'(t)$.
2. Symbolisch is
$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$
maar nu is $(f \circ x)''(t) \neq f''(x(t))(x'(t))^2$.

$\rightarrow$ Als infinitesimalen niet wiskundig gedefinieerd zijn, aan welke eigenschappen voldoen ze dan?

De 19de eeuw: infinitesimalen verbannen

Wiskundige analyse werd ontwikkeld zonder infinitesimalen.

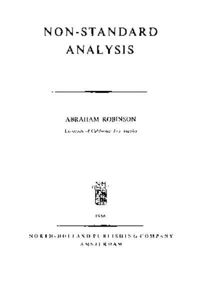
Bernard Bolzano (1781-1848)

Karl Weierstrass (1815-1897)

f is continu in a als

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

De 20ste eeuw: infinitesimalen gefundeerd


NON-STANDARD
ANALYSIS

ABRAHAM ROBINSON

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM


WING THEORY

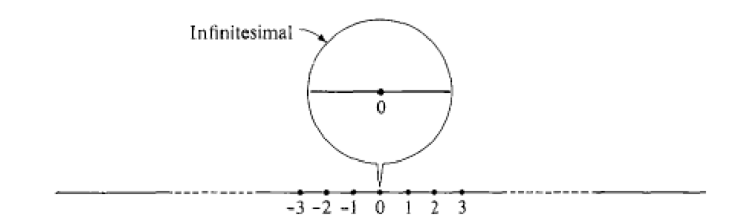
Abraham Robinson, *Non-standard analysis*, 1966.

Robinson realiseert de *Principes van Leibniz*

Robinson construeert een uitbreiding ${}^*\mathbb{R}$ van $\mathbb{R}$ die infinitesimalen bevat:

Definitie

$x \in {}^*\mathbb{R}$ is **infinitesimaal** als $-r < x < r$ voor elke $r \in \mathbb{R}^+$.
Notatie: $x \approx 0$.



Notatie: $x \approx y$ betekent $x - y \approx 0$.

Robinson realiseert de *Principes van Leibniz*

Overdrachtsprincipe

Rekenregels voor reële getallen blijven gelden voor hyperreële getallen.

Voorbeelden

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$$
$$(\forall x, y \in \mathbb{R})((x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \iff x = y = 1)$$
$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R})(xy = 1))$$
$$(\forall x \in \mathbb{R})(|\sin x| \leq |x|)$$
$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(e^{x+y} = e^x e^y)$$

Robinson realiseert de *Principes van Leibniz*

Overdrachtsprincipe

Rekenregels voor reëele getallen blijven gelden voor hyperreëele getallen.

Voorbeelden

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(x^2 \geq 0)$$
$$(\forall x, y \in {}^*\mathbb{R})((x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \iff x = y = 1)$$
$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in {}^*\mathbb{R})(xy = 1))$$
$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|\sin x| \leq |x|)$$
$$(\forall x, y \in {}^*\mathbb{R})(e^{x+y} = e^x e^y)$$

$\rightarrow$ hyperreëele getallen hebben zelfde *look and feel* als reëele getallen

Modeltheorie

- Modeltheorie = deel van de logica
- Bestudeert welke wiskundige structuren (*modellen*) aan een gegeven stel axioma's voldoen.

Voorbeeld (Axioma's van het euclidisch vlak)

- Door iedere twee verschillende punten gaat een rechte.
- Ieder lijnstuk kan verlengd worden tot een rechte.
- Er bestaat een cirkel met een gegeven lijnstuk als straal en een van de eindpunten als middelpunt.
- Alle rechte hoeken zijn gelijk.
- Gegeven een rechte L en een punt p niet op L gelegen, bestaat er juist één rechte door p die L niet snijdt (*parallellenpostulaat*).

Modeltheorie

- Door iedere twee verschillende punten gaat een rechte.
- Ieder lijnstuk kan verlengd worden tot een rechte.
- Er bestaat een cirkel met een gegeven lijnstuk als straal en een van de eindpunten als middelpunt.
- Alle rechte hoeken zijn gelijk.

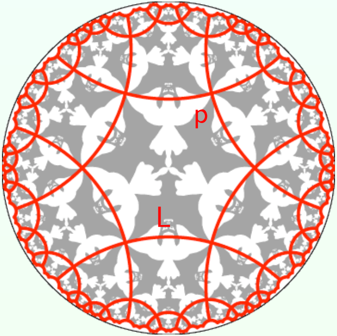
Klassieke vlakke meetkunde = een *model* voor dit axiomastelstel.

Er bestaan andere modellen!
Bijv.: hyperbolische meetkunde (Gauss - Bolyai - Lobachevsky, 1824–1832)

Modeltheorie

- Door iedere twee verschillende punten gaat een rechte.
- Ieder lijnstuk kan verlengd worden tot een rechte.
- Er bestaat een cirkel met een gegeven lijnstuk als straal en een van de eindpunten als middelpunt.
- Alle rechte hoeken zijn gelijk.

Klassieke vlakke meetkunde = een *model* voor dit axiomastelstel.



Er bestaan andere modellen!
Bijv.: hyperbolische meetkunde
(Gauss - Bolyai - Lobachevsky, 1824–1832)

Modeltheorie

Niet-standaard model = een ander model van een axiomastelsel dan het model dat men oorspronkelijk voor ogen had

Voorbeelden

- De hyperbolische meetkunde is een *niet-standaard* model van de axioma's van Euclides (zonder parallellenpostulaat)
- ${}^*\mathbb{R}$ is een *niet-standaard* model van $\mathbb{R}$ (dit is juist het Overdrachtsprincipe)

Toepassingen

Stelling

f is continu in a $\iff$ $f(x) \approx f(a),\ \forall x \approx a.$

Ook meer gevorderde noties uit de analyse worden intuïtiever:

Voorbeeld (Compactheid)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ is compact $\iff$ $(\forall x \in {}^*A)\ (\exists a \in A)\ (x \approx a).$

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : P(x,a,b)\} \quad \Rightarrow \quad {}^*A = \{x \in {}^*\mathbb{R}^n : P(x,a,b)\}$$

Toepassingen

Stelling

f is continu in $a \quad \iff \quad f(x) \approx f(a), \forall x \approx a.$

Ook meer gevorderde noties uit de analyse worden intuïtiever:

Voorbeeld (Compactheid)

$A \subseteq X$ is compact $\quad \iff \quad (\forall x \in {}^*A)\ (\exists a \in A)\ (x \approx a).$

(X een topologische ruimte)

Toepassingen

Voorbeeld (Dirac)

De δ-functie is een hypothetische functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met de volgende eigenschappen:

- $\delta(x) = 0$ als $x \neq 0$
- $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 1$
- δ is onbeperkt afleidbaar

(Zulke functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat niet!)
De δ-functie kan voorgesteld worden d.m.v. een onbeperkt afleidbare functie ${}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ waarvoor

- $\delta(x) = 0$ als $x \not\approx 0$
- $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 1$
- δ is onbeperkt afleidbaar

Toepassingen

De δ-functie wordt gebruikt om stellingen over differentiaalvergelijkingen aan te tonen, bijv.:

Stelling (Elliptische differentiaalvergelijkingen)

Elke oplossing $u\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ van de vergelijking

$$\sum_{i_1+\cdots+i_m\leq n} c_{i_1,\ldots,i_m} \partial_1^{i_1} \cdots \partial_m^{i_m} u = f$$

($f \in \mathcal{C}^\infty$, $c_{i_1,\ldots,i_m} \in \mathbb{C}$) is onbeperkt afleidbaar als

$$\sum_{i_1+\cdots+i_m=n} c_{i_1,\ldots,i_m} x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m} \neq 0 \quad \forall (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Met onbeperkt afleidbare functies ${}^*\mathbb{R}^m \to {}^*\mathbb{C}$ kan men deze stelling (intuïtiever) bewijzen.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ (Euler)

Voor elke $N \in \mathbb{N}$ en $x \in \mathbb{R}$ is

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = 1 + \binom{N}{1}\frac{x}{N} + \binom{N}{2}\frac{x^2}{N^2} + \cdots + \binom{N}{N-1}\frac{x^{N-1}}{N^{N-1}} + \frac{x^N}{N^N}.$$

Dit geldt ook als N oneindig groot is ($N \in {}^*\mathbb{N}$). Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is

$$\binom{N}{n}\frac{x^n}{N^n} = \frac{N}{N}\frac{N-1}{N}\cdots\frac{N-n+1}{N}\frac{x^n}{n!} \approx \frac{x^n}{n!}.$$

Omdat $\binom{N}{n}\frac{x^n}{N^n} + \cdots + \frac{x^N}{N^N} \approx 0$ voor elke oneindige n, is

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^N \approx \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Euler toont dan verder aan dat $\left(1+\frac{x}{N}\right)^N \approx e^x$ $(= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n)$.

Wat interesseert mij (op wiskundig gebied)?

A mathematician is a machine that turns coffee into theorems.
P. Erdős

⇒ nieuwe wiskunde ontdekken

Mathematics is a human activity and our aim is not only to discover things but to pass this information on. [...]

Euler had an intuition built up out of a great variety of experience, and this kind of intuition is very hard to convey. [...]

The point of having a rigorous mathematical statement is so that something which in the first place is subjective, becomes objective and capable of transmission.
M. Atiyah

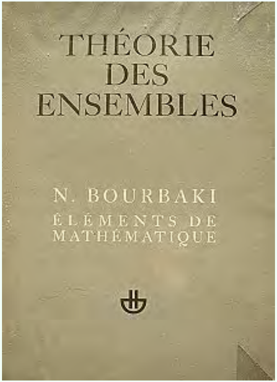
... maar ook wiskunde beter begrijpen:
intuïtieve (en tegelijk rigoureuze) bewijzen geven van gekende resultaten.

Wat interesseert mij (op wiskundig gebied)?

20ste eeuw: N. Bourbaki = invloedrijke groep van Franse wiskundigen

Wat interesseert mij (op wiskundig gebied)?

Éléments de mathématique (10 delen, $>$ 5000 paginas)



Wat interesseert mij (op wiskundig gebied)?

Éléments de mathématique (10 delen, $>$ 5000 paginas)

1. Verzamelingenleer
2. Algebra
3. Topologie
4. Functies van één reële veranderlijke
5. Topologische vectorruimten
6. Integratie
7. Commutatieve algebra
8. Differentieerbare variëteiten
9. Lie-groepen
10. Spectraaltheorie

Wat interesseert mij (op wiskundig gebied)?

Uit het voorwoord:

The method of exposition is axiomatic and abstract,
and normally proceeds from the general to the particular.

This has been dictated by the main purpose of the treatise,
which is to provide a solid foundation
for the whole body of modern mathematics.

Wat interesseert mij (op wiskundig gebied)?

Uit het voorwoord:

It follows that the utility of certain considerations
will not be immediately apparent to the reader
unless he has already an extended knowledge of mathematics;

otherwise he must have the patience
to suspend judgment until the occasion arises.

$\Rightarrow$ teksten die zeer doordacht zijn qua opbouw
... maar zeer ondidaktisch!

We are not very pleased when we are forced to accept
a mathematical truth by virtue of a complicated chain
of formal conclusions and computations,
which we traverse blindly, link by link, feeling our way by touch.

We want to understand the idea of the proof, the deeper context.

H. WEYL

Wat interesseert mij (op wiskundig gebied)?

Wiskundigen hebben de neiging hun ideeën te verbergen:

> *Gauss is als een vos, die zijn sporen uitwist met zijn staart.*
>
> N. Abel

Redenen?

- "kortste pad"
  (logisch equivalent $\neq$ equivalent om voor het eerst te leren)
- ideeën zijn vaak vaag, een bewijs komt chaotisch tot stand
- ideeën goed weergeven vraagt extra inspanning bovenop correctheid
- "een definitie/axioma behoeft geen motivatie"
- een abstract begrip kunnen leren zonder meteen toepassingen te kennen = vaardigheid
- soms zijn efficiënte definities een synthese van veel ervaring
  vb.: A. Grothendieck in algebraïsche meetkunde
- ideeën worden gemakkelijker mondeling overgedragen