



PUMAthematics

3 maart 2016

Oplossingen

1 Cirkelredenering

Merk op dat a_n steeds op de cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 1 ligt. Voor de poolhoek θ_n geldt: $\theta_0 = 0$ en $\theta_{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \theta_n$. Met inductie volgt hieruit $\theta_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ voor $n > 0$. Omdat $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$ zijn er twee limietpunten, horend bij $\theta = \ln 2$ en $\theta = -\ln 2$: $(\cos(\ln 2), \sin(\ln 2))$ en $(\cos(\ln 2), -\sin(\ln 2))$.

2 $0 \in \mathbb{R}$ instinct

- (a) Vullen we $x = 0$ in, dan blijkt dat $f(0) = 0$. Zij $x \in \mathbb{R}$. Er geldt $f(x) = x - f(\frac{x}{2})$; per inductie volgt dat voor $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x}{(-2)^k} + (-1)^{n+1} f(\frac{x}{2^{n+1}})$. Nemen we $n \rightarrow \infty$, dan gaat $f(\frac{x}{2^{n+1}}) \rightarrow 0$ aangezien f continu is in 0. Dus $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{(-2)^k} = \frac{2}{3}x$, en deze functie is inderdaad continu.
- (b) We zoeken een afleidbare g met $g(x) = -g(\frac{x}{2})$ voor $x \geq 2$ of nog, $g(2x) = -g(x)$ voor $x \geq 1$. We kunnen g dus a.h.w. recursief definiëren op $[2^k, 2^{k+1}[$ zodra g gedefinieerd is op $[1, 2[$, d.m.v. $g(x) = -g(\frac{x}{2})$. Om zeker te zijn dat g afleidbaar is in 2^k zorgen we er voor dat $g'(1) = g'(2) = 0$. Een mogelijkheid is bijvoorbeeld $g(x) = (x-1)^2(x-2)^2$ op $[1, 2[$, en daarmee wordt $g(x) = (-1)^k(\frac{x}{2^k} - 1)^2(\frac{x}{2^k} - 2)^2$ op $[2^k, 2^{k+1}[$.

3 Nihilistisch determinisme

- (a) De maximale dimensie is 2. Stel immers dat V drie lineair onafhankelijke matrices A, B, C heeft. Dan heeft elke niet-triviale lineaire combinatie van A, B, C zeker een niet-nulrij als bovenste rij. De bovenste rijen van A, B, C zijn dus lineair onafhankelijk, in tegenstrijd met het feit dat $\mathbb{R}^2$ dimensie 2 heeft. Aangezien $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$ is het niet mogelijk dat $\dim V = 2$.
- (b) De maximale dimensie is 1. Stel immers dat V twee lineair onafhankelijke matrices A, B heeft. $\det(xA + B)$ is dan een veelterm van graad hoogstens 3, waarbij de



PUMAthematics

3 maart 2016

coëfficiënt van x^3 gelijk is aan $\det A \neq 0$. Deze derdegraadsveelterm heeft dus een reëel nulpunt x ; m.a.w. $xA + B \neq 0$ is niet inverteerbaar, strijdigheid.

Opmerking. Aangezien

$$\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} = -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

is voor $n = 4$ de maximale dimensie 4. (Dat ze niet groter kan zijn, volgt uit een analoge redenering als in deel (a).)

4 Eventjes continu afleidbaar

- (a) Omdat f' een eindig aantal nulpunten heeft, geldt dat f elke waarde y slechts een eindig aantal keer bereikt. Zoniet zou wegens de middelwaardstelling f' een nulpunt hebben tussen elke twee punten waar y bereikt wordt, en dus oneindig veel nulpunten hebben, tegenstrijd. (I.h.b. bestaat er geen open interval waarop f constant is.) Veronderstel dus dat f elke waarde een even aantal keer bereikt. Stel z.v.v.a. $f(0) = 0$.
 - (i) Veronderstel dat $f(1) \neq 0$. Stel z.v.v.a. dat f stijgend is in een omgeving van 0. f' heeft een eindig aantal nulpunten, dus f heeft een eindig aantal lokale extrema. Voor $0 < \varepsilon < |f(1)|$ voldoende klein heeft f dus geen lokale extrema met waarde in $[-\varepsilon, 0[\cup]0, \varepsilon]$. Het aantal keer dat een $y \in]0, \varepsilon]$ wordt bereikt verschilt dan op een oneven aantal van het aantal keer dat een $y \in [-\varepsilon, 0[$ wordt bereikt (aangezien lokale extrema met waarde 0 de pariteit van het verschil niet beïnvloeden, en waarden in $]0, \varepsilon]$ één keer extra worden bereikt in een omgeving van 0), tegenstrijd. Dus $f(1) = 0$.
 - (ii) We tonen aan dat voor $y \neq 0$, het aantal lokale extrema met waarde y even is. Veronderstel van niet. Voor $0 < \varepsilon < |y|$ voldoende klein heeft f geen lokale extrema met waarde in $]y, y + \varepsilon]$, zodat waarden in $]y, y + \varepsilon]$ een oneven aantal keer meer (of minder) worden bereikt dan y (elk lokaal extremum met waarde y verandert het verschil met 1), tegenstrijd. I.h.b. geldt dat de pariteit van het totale aantal lokale extrema gelijk is aan de pariteit van het aantal lokale extrema met waarde 0.



PUMAthematics

3 maart 2016

- (iii) Stel z.v.v.a. dat f stijgend is in 0. Als f dalend is in 1, snijdt f de x -as een even aantal keer. Het aantal lokale extrema met waarde 0 moet dus even zijn. Anderzijds geldt, omdat het eerste en laatste lokaal extremum van f lokale maxima zijn, dat het totaal aantal lokale extrema oneven is, tegenstrijd. Als f stijgend is in 1, snijdt f de x -as een oneven aantal keer. Het aantal lokale extrema met waarde 0 moet dus oneven zijn. Anderzijds geldt, omdat het eerste resp. laatste lokaal extremum van f een lokaal maximum resp. minimum is, dat het totaal aantal lokale extrema even is, tegenstrijd.
- (b) Een mogelijkheid is $\cos 5\pi x$: deze bereikt -1 en 1 elk 3 keer, en elk getal in $] -1, 1[$ precies 5 keer.

5 I'm not going to spend my life being a color

Merk op dat het veranderen van de kleur van twee verschillende lagen niet afhangt van de volgorde waarin dit wordt gedaan. Een opeenvolging van handelingen wordt dus volledig bepaald door de lagen die zijn geïnverteerd. Stel $n = 2016$.

- (a) Indien in de drie richtingen respectievelijk a , b en c lagen geïnverteerd zijn, dan is het totaal aantal witte kubussen gelijk aan $(n-a)(n-b)(n-c) + ab(n-c) + bc(n-a) + ac(n-b)$ (het aantal kubussen dat niet geïnverteerd is plus het aantal kubussen dat precies 2 keer geïnverteerd is). Dit kunnen we ook nog schrijven als $\frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}(n-2a)(n-2b)(n-2c)$. Het is m.a.w. mogelijk om k witte kubussen te bekomen a.s.a. $2k - n^3 = xyz$ voor zekere $x, y, z \in 2\mathbb{Z}$ met $|x|, |y|, |z| \leq n$. Omdat n is even volgt meteen dat k deelbaar moet zijn door 4. We konden dit ook als volgt zien: wanneer we een laag inverteren waarin w witte kubussen liggen, dan liggen er daarna $n^2 - w$ witte kubussen in. Het aantal witte kubussen in dat vlak is dus vergroot met $n^2 - 2w$, hetgeen alvast deelbaar is door 2. We tonen nog aan dat het aantal witte kubussen in een vlak even blijft. Indien dit vlak zelf wordt geïnverteerd geldt dit inderdaad, zoals zopas aangetoond. Indien een vlak dat ermee snijdt wordt geïnverteerd en er v witte kubussen op de snijlijn liggen, dan vergroot het aantal witte kubussen met $n - 2v$, wat opnieuw even is. w blijft dus even, zodat $4 \mid n^2 - 2w$. Het totaal aantal witte kubussen blijft dus deelbaar door 4. 2017 en 2018 zijn dus alvast niet mogelijk. Voor $k = 1008$ zou $n(n-1)(n+1) = n^3 - n = xyz$ met $|x|, |y|, |z| \leq n$, maar $n+1$ is priem, dus ook 1008 is onmogelijk.



PUMAthematics

3 maart 2016

- (b) Beschouw de verzameling G van alle mogelijke opeenvolgingen van inverteringen. Deze vormt een groep onder de samenstelling, waarin elke element een involutie is. Definieer ook nog de equivalentierelatie $\sim$ op G als $g \sim h$ a.s.a. g en h dezelfde kleuring van de kubus bepalen. Het gezochte aantal mogelijke kleuringen is dan gelijk aan de orde van de quotiëntverzameling $G/\sim$. Twee elementen $g, h \in G$ bepalen eenzelfde kleuring van de kubus a.s.a. gh^{-1} de kubus invariant laat, m.a.w. a.s.a. gh in de deelgroep $H \leq G$ zit die de kubus invariant laat. De equivalentieklassen van $\sim$ zijn dus precies de nevenklassen van H in G , zodat $|G/\sim| = |G|/|H|$. $|G| = 2^{3 \cdot 2016}$; we bepalen nu $|H|$. Zij $h \in H$. Met de notaties uit deel (a) moet gelden dat $(n-2a)(n-2b)(n-2c) = n^3$, dus onder (a, b, c) moeten er twee gelijk zijn aan n en de derde gelijk aan 0, of $a = b = c = 0$. Dus $|H| = 4$, zodat $|G/\sim| = 2^{3 \cdot 2016 - 2}$. Een alternatieve manier om dit in te zien, zonder de formules uit (a): Het kan niet dat $a, b, c \neq 0$, want dan zou er een kubusje bestaan dat precies 3 keer wordt geïnverteerd. Volgens een bepaalde richting worden dus geen lagen geïnverteerd. Veronderstel dat h minstens één laag L inverteert. Dan moeten ook alle lagen loodrecht hierop (en die niet volgens de verboden richting liggen) worden geïnverteerd, waardoor noodzakelijk alle lagen evenwijdig met L worden geïnverteerd. h bestaat dus uit het invertieren van alle lagen die in 2 van de 3 richtingen liggen. Dus $|H| = 4$. Merk nog op dat het resultaat ook meer rechtstreeks volgt uit de baanformule voor de actie van G op de kubus: G werkt transitief, en de grootte van de unieke baan is gelijk aan $|G|$ gedeeld door de grootte van de stabilisator van (bijvoorbeeld) de beginsituatie, en deze is $|H|$.

6 Finitistisch egalitarisme

- (a) Een mogelijke strategie is dat iedereen de helft van zijn stapel naar rechts doorgeeft, en dit telkens opnieuw. We tonen aan dat dit werkt. Noem $a_1, a_2, \dots, a_n$ de hoeveelheden zand van de personen in de volgorde zoals ze in de cirkel zitten. (We werken met indices modulo n .) Voor de som van kwadraten S van alle gewichten geldt, na het doorgeven: $S' = \sum (\frac{a_j + a_{j+1}}{2})^2 = S - \frac{1}{4} \sum (a_j - a_{j+1})^2$. Het idee is dat als niet iedereen asymptotisch even veel zand heeft, die som blijft dalen met (minstens) een vaste positieve waarde. Veronderstel dus uit het ongerijmde dat $\varepsilon > 0$ bestaat zodanig dat er steeds twee hoopjes zijn waarvoor het verschil $a_j - a_{j+k} > \varepsilon$ ($k < n$). Nu is $a_j - a_{j+k} = (a_j - a_{j+1}) + (a_{j+1} - a_{j+2}) + \dots + (a_{j+k-1} - a_{j+k})$, dus bestaan er steeds twee burens waartussen het verschil minstens $\frac{\varepsilon}{n}$ is (daar $k < n$). In elke stap daalt de som van kwadraten dus met minstens $\frac{1}{4} (\frac{\varepsilon}{n})^2$, in tegenstrijd met het feit dat die som positief is.



PUMAthematics

3 maart 2016

- (b) We stellen een situatie voor door een veelterm $a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$, waarbij $a_1, a_2, \dots, a_n$ zoals daarnet de hoeveelheden zand zijn van de personen in de volgorde zoals ze in de cirkel zitten. Een toegestane operatie kunnen we nu voorstellen door vermenigvuldiging met een veelterm van de vorm $q + (1 - q)x^k$ voor zekere $q \in [0, 1]$, en het resultaat modulo $x^n - 1$ te nemen. Iedereen heeft evenveel zand a.s.a. vermenigvuldigen met $x - 1$ oplevert (modulo $x^n - 1$). Noemen we P de beginveelterm en $Q_1, \dots, Q_N$ de veeltermen waarmee wordt vermenigvuldigd, dan moet dus $x^n - 1 \mid (x - 1)PQ_1 \dots Q_N$. Omdat $P = 1$ een mogelijkheid is, is het nodig en voldoende dat $x^n - 1 \mid (x - 1)Q_1 \dots Q_N$ of equivalent, elke n -de eenheidswortel $\zeta \neq 1$ treedt op als nulpunt van een zekere $Q_j = q_j + (1 - q_j)x^{k_j}$. Alle nulpunten van Q_j hebben modulus $(\frac{q_j}{1 - q_j})^{1/k_j}$, dus kan $Q_j(\zeta) = 0$ enkel als $q_j = \frac{1}{2}$. Als $n = 2^m$ kunnen we $Q_j = \frac{1}{2}(1 + x^{2^j})$ nemen, aangezien $x^{2^m} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \dots (x^{2^{m-1}} + 1)$. Veronderstel nu dat n een oneven deler m heeft, en zij $\zeta \neq 1$ een m -de eenheidswortel met orde $r > 1$, met dus $r \mid m$. Dan moet $\zeta^k + 1 = 0$ voor zekere k , zodat $\zeta^{2k} = 1$. Dus $r \mid 2k$, en r is oneven, dus $r \mid k$ zodat $\zeta^k = 1$, strijdigheid. n moet dus een macht van 2 zijn.