



# PUMAthematics

## 3 maart 2016

### Wedstrijdreglement

- (a) De competitie bevat zes vragen, die elk op evenveel punten staan. Je krijgt 180 minuten de tijd om zo veel mogelijk vragen op te lossen.
- (b) Handboeken, rekenmachines, gsm's en andere hulpmiddelen zijn hierbij niet toegestaan. Enkel pen en papier mogen gebruikt worden.
- (c) Vermeld op ieder ingediend blad duidelijk je naam en het volgnummer van de vraag, en op minstens één blad ook je jaar en richting. Werk op elk blad maar aan één vraag.
- (d) Bij verdere vragen of betwistingen is uitsluitend de jury bevoegd.
- (e) Door deel te nemen aan de PUMA 2016 verklaart men zich akkoord met dit reglement.

De proclamatie van deze wedstrijd gaat door op maandag 14 maart 2016 om 13.00h in gebouw S9, auditorium A3. Wil je weten naar wie de 60 euro prijzengeld gaat, beschouw dit dan gerust als een uitnodiging. Zoals vorig jaar combineren we de proclamatie met een pizzafestijn. Wil je een pizza bestellen, dan kan je dat op voorhand op onze website ingeven. Verdere informatie verschijnt tijdig op onze website: <http://prime.ugent.be>.



PUMAthematics

3 maart 2016

## Vragen

### 1 Cirkelredenering

We construeren recursief een rij punten in het vlak als volgt: Stel  $a_0 = (1, 0)$ , en definieer  $a_n$  door  $a_{n-1}$  over  $\frac{1}{n}$  radialen in tegenwijzerzin rond de oorsprong te draaien en vervolgens te spiegelen t.o.v. de  $x$ -as. Bepaal de limietpunten van de rij  $(a_n)$ .

*Ter opfrissing: een limietpunt van een rij in  $\mathbb{R}^m$  is een punt  $x \in \mathbb{R}^m$  waarvoor elke open bal met centrum  $x$  een punt van die rij verschillend van  $x$  bevat, of equivalent, waarvoor een deelrij bestaat die naar  $x$  convergeert. Voor een convergente rij vallen de begrippen 'limiet' en 'limietpunt' dus samen.*

### 2 $0 \in \mathbb{R}$ instinct

- Bepaal alle continue functies  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  waarvoor  $f(x) + f(\frac{x}{2}) = x$  voor alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- Toon aan dat er een afleidbare functie  $g: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  bestaat die niet identisch 0 is en waarvoor  $g(x) + g(\frac{x}{2}) = 0$  voor  $x \geq 2$ .  
(Merk op dat we, door bij  $g$  een oplossing uit (a) op te tellen, een oplossing van  $f(x) + f(\frac{x}{2}) = x$  op  $[1, +\infty[$  bekomen die niet samenvalt met een functie uit (a).)

### 3 Nihilistisch determinisme

Zij  $V$  een deelruimte van  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , de vectorruimte van reële  $n \times n$ -matrices, met de eigenschap dat iedere niet-nul matrix van  $V$  inverteerbaar is.

- Wat is de maximale dimensie van  $V$  als  $n = 2$ ?
- Wat is de maximale dimensie van  $V$  als  $n = 3$ ?

### 4 Eventjes continu afleidbaar

Zij  $f \in C^1[0, 1]$  een continu afleidbare functie die waarden in  $\mathbb{R}$  aanneemt. Veronderstel dat de afgeleide  $f'$  slechts een eindig aantal nulpunten heeft in  $[0, 1]$ .

- Toon aan dat er een  $y \in \mathbb{R}$  bestaat die het beeld is van een oneven aantal  $x \in [0, 1]$ . Ga hiervoor bijvoorbeeld als volgt te werk. Veronderstel dat geen zo'n  $y$  bestaat.
  - Toon aan dat  $f(0) = f(1)$ .
  - Bewijs dat als  $y \neq f(0)$  het aantal lokale extrema van  $f$  met waarde  $y$  even is.
  - Bewijs dat het aantal lokale extrema van  $f$  zowel even als oneven moet zijn.



PUMAthematics

3 maart 2016

- (b) Toon aan dat de eigenschap uit (a) niet geldt wanneer we ‘even’ vervangen door ‘oneven’. M.a.w. geef een voorbeeld van een  $f \in C^1[0, 1]$  die niet strikt stijgend of strikt dalend is, waarvoor  $f'$  een eindig aantal nulpunten heeft en zo dat  $f$  elk reëel getal ofwel niet, ofwel een oneven aantal keer aanneemt.

## 5 I'm not going to spend my life being a color

Een kubus met ribben met lengte 2016 bestaat uit  $2016^3$  kleine kubusjes met volume 1, die initieel allemaal wit gekleurd zijn. De toegestane operatie bestaat erin in een laag (van  $2016^2$  kubusjes) alle kubusjes van kleur te veranderen, t.t.z. wit in zwart en vice versa. De laag mag zowel horizontaal als verticaal zijn.

- (a) Is het mogelijk om na een aantal handelingen precies 2017 zwarte kubusjes te bekomen? 2018? 1008?
- (b) Hoeveel verschillende kleuringen kan men bekomen door een aantal operaties uit te voeren? (Wanneer twee kleuringen uit elkaar bekomen worden door een opeenvolging van draaiingen of spiegelingen van de kubus, worden ze toch als verschillend beschouwd.)

## 6 Finitistisch egalitarisme

$n$  mensen staan in een cirkel en hebben elk een hoopje zand en een weegschaal voor zich. Het is toegestaan dat, voor elke  $k < n$ , alle aanwezigen eenzelfde fractie van hun hoopje zand doorgeven aan de persoon die  $k$  plaatsen rechts van zich is gezeten. Bijvoorbeeld de helft, of een derde, of 37%, of gewoon alles. De voorwaarde is wel dat de waarde van  $k$  dezelfde is voor iedereen. Een mogelijkheid is dus bijvoorbeeld dat iedereen 20% van zijn zand doorgeeft aan de persoon twee plaatsen links van zich.

- (a) Toon aan dat er voor elke beginsituatie een (oneindige) rij handelingen bestaat waarvoor in de limiet iedereen even veel zand heeft.
- (b) Bepaal de waarden van  $n$  waarvoor het, ongeacht de beginsituatie, steeds mogelijk is om na een eindig aantal keer zand door te geven, te bekomen dat iedereen precies even veel zand heeft.