PUMAthematics

25 februari 2019

Oplossingen

1 To the limits and beyond

Door eventueel een eindig aantal termen weg te laten, mogen we veronderstellen dat $1 \leqslant x_0 < 2$. Daarna zien we dat de elementen van de rij waarvan de indices congruent zijn met 0, 1 of 2 modulo 3, zich respectievelijk in de intervallen $[1,2[, [2,4[$ en $[4,7[$ bevinden.

Noem deze 3 deelrijen, bepaald door de indices van dezelfde congruentieklassen modulo 3, x_a, x_b en x_c. Dan zien we dat

$$\begin{cases} x_{a+1} = \dfrac{3x_a + 1}{4} = \dfrac{3x_a}{4} + \dfrac{1}{4} \\ x_{b+1} = \dfrac{3x_b/2 + 1}{2} = \dfrac{3x_b}{4} + \dfrac{1}{2} \\ x_{c+1} = \dfrac{3x_c}{4} + 1 \end{cases}$$

Deze betrekkingen kunnen we ook expliciet oplossen:

$$\begin{cases} x_a = \left(\dfrac{3}{4}\right)^a x_{a0} + \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^a}{1 - \frac{3}{4}} \cdot \dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^a x_{a0} + 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^a \\ x_b = \left(\dfrac{3}{4}\right)^b x_{b0} + \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^b}{1 - \frac{3}{4}} \cdot \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^b x_{b0} + \left(1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^b\right) \cdot 2 \\ x_c = \left(\dfrac{3}{4}\right)^c x_{c0} + \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^c}{1 - \frac{3}{4}} \cdot 1 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^c x_{c0} + \left(1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^c\right) \cdot 4 \end{cases}$$

Deze 3 deelrijen zijn duidelijk convergent, en convergeren naar respectievelijk 1, 2 en 4. Dit zijn dan ook alle limietpunten van de oorspronkelijke rij.

2 Schaakmat Fermat

Als we deze vergelijking naar x oplossen bekomen we $x = \frac{yz}{y-z}$. Een oplossing (x, y) wordt dus uniek bepaald door y, en die bestaat dus als en slechts als $y - z | yz$.

Nu geldt $yz = (y - z + z)z = (y - z)z + z^2$, dus is er een oplossing voor y als en slechts als $y - z | z^2$, dus $y = z + d$, met d een deler van z^2.

Door te priemontbinding van z^2 te bekijken zien we dat er juist $\prod_{i=1}^{n} 2m_i + 1$ zo'n delers zijn, en dus is dat ook het aantal oplossingen.

3 All subsets are equal, but some subsets are more equal than others

S heeft 10 elementen, en dus 1024 mogelijke deelverzamelingen. Hiervan zijn er 1023 niet-ledig. De maximale som van de elementen van zo'n deelverzameling is kleiner dan $10 \cdot 100 = 1000$, en dus vinden we via het duivenhokprincipe 2 deelverzamelingen met dezelfde som van de elementen.

Door de gemeenschappelijke elementen uit die 2 deelverzamelingen te halen, vinden we dan 2 deelverzamelingen die disjunct zijn en dezelfde som hebben.

4 Into the matrix

De tweede vergelijking kan herschreven worden als $(A-B)C-C(A-B) = \lambda I$. Aangezien voor alle matrices $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ geldt dat $tr(XY) = tr(YX)$ en $tr(X - Y) = tr(X) - tr(Y)$, zien we dat $tr((A-B)C-C(A-B)) = 0$, en dus is $\lambda = 0$. Hierbij is $tr(\cdot)$ de trace-afbeelding, die een vierkante matrix afbeeldt op de som van zijn diagonaalelementen.

Daarna kunnen we de eerste vergelijking herschrijven als $AC+BC-C-A-B+I = I$, waaruit volgt dat $(A + B - I)(C - I) = I$. We vinden dus inverse matrices, en die commuteren altijd. Er geldt dus $(C-I)(A+B-I) = I$, waaruit $CA+CB = A+B+C$. Dus $AC + BC = A+B+C = CA+CB$.

We weten dus dat

$$(A - B)C = C(A - B)$$

en dat

$$(A + B)C = C(A + B).$$

Elke lineaire combinatie van $A + B$ en $A - B$, waaronder B, commuteert dus met C.

5 Take it or Leavitt

(a) Het is duidelijk dat B er steeds voor kan zorgen dat hij de $n+2$de kaart kan nemen: als A de eerste kaart neemt, laat B de volgende n kaarten liggen en neemt de $n+2$de kaart. Als A de eerste n kaarten laat liggen en de $n+1$ste kaart neemt, hoeft B gewoon de volgende kaart te nemen. Alle gevallen daartussen zijn analoog.

Als er dus maar $n+2$ kaarten zijn, en de laatste kaart is meer waard dan alle andere kaarten samen, kan B het spel altijd winnen. Een voorbeeld hiervan: de eerste $n+1$ kaarten zijn 1 waard, en de laatste kaart is $n+2$ waard.

Voor geen enkele n kan A altijd winnen of gelijkspel spelen.

(b) Hiervoor beschouwen we het volgende equivalente spel. Een beurt bestaat uit "geef zoveel van de bovenste kaarten als je wil aan de tegenstander, tot je een kaart kiest die je zelf houdt".

We bewijzen nu per inductie op het aantal kaarten dat A het spel altijd kan winnen. Voor een kaart is het gemakkelijk: dan kan A de kaart nemen en is het spel voorbij.

Definieer de waarde van het spel als het verschil in score tussen A en B, als beiden optimaal spelen. A kan er dus altijd voor zorgen dat het verschil in score minstens die waarde is, en B dat dat verschil ten hoogste die waarde is. We bewijzen eerst dat de waarde van een spel goed gedefiniëerd is, en aan de gewenste voorwaarden voldoet.

Lemma. *Elk spel heeft een waarde x, zodat A er altijd voor kan zorgen dat het verschil in score ten minste x is, en B kan er altijd voor zorgen dat het verschil in score hoogstens x is.*

Bewijs. We bewijzen dit door aan elke mogelijke situatie, en dat zijn er maar een eindig aantal, een waarde toe te kennen. Dit doen we via achterwaartse recursie. Als een spel gedaan is, kennen we daaraan het verschil in score toe, die verkregen wordt door dat exacte spel te spelen. Als A aan de beurt is, kennen we aan die situatie het maximum van de waarden van de mogelijke vervolgsituaties toe. Als B aan de beurt is, kennen we aan die situatie het minimum van de waarden van de mogelijke vervolgsituaties toe.

De uiteindelijke waarde van het spel is dan de waarde van de beginsituatie. A kan altijd voor een verschil in score zorgen die ten minste die waarde is, door bij elke situatie waar A aan de beurt is, de zet te spelen die de grootste waarde oplevert. Analoog voor B, die telkens de zet moet spelen die de kleinste waarde oplevert. De waarde die gekozen wordt komt dan overeen met de waarde van de huidige situatie

Hierdoor zien we dat de waarde van het spel goed gedefiniëerd is, en aan de gewenste eigenschappen voldoet. $\square$

De inductiehypothese zegt dan dat als er $m-1$ kaarten zijn, de waarde van het spel niet negatief is. Zij dus een spel met m kaarten, waarbij x de waarde van de eerste kaart is, en y de waarde van het spel waarbij de eerste kaart wordt weggelaten. x en y zijn dus beiden niet negatief.

Als $x \geqslant y$, kan A de eerste kaart nemen, en het volgende spel optimaal spelen. Dat volgende spel bestaat uit de volgende $m-1$ kaarten, en B mag beginnen. De totale waarde van het spel is dan $x-y \geqslant 0$. Als $x < y$, kan A de eerste kaart aan B geven, en het volgende spel optimaal spelen, waarbij hij zelf mag beginnen. De totale waarde van dit spel is $y-x > 0$.

We concluderen dus dat A het spel altijd kan winnen of gelijkspelen.

6 Polyvalente polynomen

Aangezien p priem is, vinden we dat $A(x^p) \equiv (A(x))^p \pmod p$. Stel nu $G_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$. Dan is

$$(A(x))^p B(x) = (A(x))^{p-1} A(x) B(x) \equiv_{p,x^n-1} (A(x))^{p-1} G_n(x),$$

waarbij $\equiv_{p,x^n-1}$ staat voor reductie modulo p met daarna een reductie modulo $x^n - 1$. Nu is ook $x^i G_n(x) \equiv G_n(x) \bmod x^n - 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$, en dus is

$$(A(x))^{p-1} G_n(x) \equiv (A(1))^{p-1} G_n(x) \pmod{x^n - 1}.$$

Door de kleine stelling van Fermat, en aangezien p geen deler is van $A(1)$, is $(A(1))^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, en dus is

$$A(x^p) B(x) \equiv_{p,x^n-1} G_n(x).$$

Nu hebben de twee veeltermen $A(x^p)B(x)$ en $G_n(x)$ niet-negatieve coëfficiënten, en aangezien $A(1)B(1) = G_n(1) = n$, is de som van de coëfficiënten van elke veelterm gelijk aan n.

Beschouw de volgende reducties:

(R1) $A(x^p)B(x)$ wordt gereduceerd modulo $x^n - 1$ tot de veelterm $G^*(x)$

(R2) $G^*(x)$ wordt gereduceerd modulo p tot $G_n(x)$

(R1) behoudt de som van de coëfficiënten, terwijl (R2) de som verandert met een veelvoud van p. Aangezien $A(1)B(1) = G_n(1) = n$ is dat veelvoud 0, en aangezien $G_n(x)$ enkel 0 en 1 als coëfficiënten heeft, is $G^*(x) = G_n(x)$.

Hieruit volgt dat $A(x^p)B(x) \equiv G_n(x) \pmod{x^n - 1}$.

Opmerking: het bovenstaande probleem, en de oplossing, komen uit het artikel "Tiling the integers with translates of one finite set", van E. M. Coven en A. Meyerowitz. Zeker de moeite om eens te bekijken!