PUMAthematics

25 februari 2019

Wedstrijdreglement

(a) De competitie bevat zes vragen, die elk op evenveel punten staan. Je krijgt 210 minuten de tijd om zo veel mogelijk vragen op te lossen.

(b) Handboeken, rekenmachines, gsm's en andere hulpmiddelen zijn hierbij niet toegestaan. Enkel pen en papier mogen gebruikt worden.

(c) Vermeld op ieder ingediend blad duidelijk je naam en het volgnummer van de vraag, en op minstens één blad ook je jaar en richting.

(d) Bij verdere vragen of betwistingen is uitsluitend de jury bevoegd.

(e) Door deel te nemen aan de PUMA 2019 verklaart men zich akkoord met dit reglement.

(f) Veel plezier en veel succes!

De proclamatie van deze wedstrijd gaat door op donderdag 14 maart 2019 om 13.00h in gebouw S25, auditorium Emmy Noether. Beschouw dit gerust als een uitnodiging. Zoals vorig jaar combineren we de proclamatie met een pizzafestijn. Wil je een pizza bestellen, dan kan je dat op voorhand op onze website ingeven. Verdere informatie verschijnt tijdig op onze website: http://prime.ugent.be.

Vragen

1 To the limits and beyond

Gegeven de rij x_n, die recursief als volgt wordt gedefinieerd:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n + 1 & \text{als } x_n < 2 \\ x_n/2 & \text{als } x_n \geq 2 \end{cases}$$

voor $n \geq 0$.

Als we beginnen met $x_0 \geq 0$, wat zijn de limietpunten van deze rij?

Ter oprfrissing: een limietpunt van een rij is een punt waar er een deelrij van de rij naar convergeert

2 Schaakmat Fermat

Beschouw de vergelijking $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$, met x, y, z natuurlijke getallen. Voor een vast getal z met priemontbinding $\prod_{i=1}^{n} p_i^{m_i}$, hoeveel oplossingen (x, y) zijn er?

3 All subsets are equal, but some subsets are more equal than others

Zij S een deelverzameling van $\{1, 2, ..., 100\}$ met precies 10 elementen. Toon aan dat men twee disjuncte, niet-ledige, deelverzamelingen van S kan vinden, zodanig dat de som van hun elementen gelijk is.

4 Into the matrix

Zij $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices, en $I \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de eenheidsmatrix. Stel dat de matrices aan volgende vergelijkingen voldoen:

$$AC + BC + \lambda AB = A + B + C$$

$$AC + CB = BC + CA + \lambda I,$$

voor zekere $\lambda \in \mathbb{C}$. Bewijs dan dat $BC = CB$.

5 Take it or Leavitt

Spelers A en B spelen een spel: op tafel ligt er een stapel met een eindig aantal kaarten, met op elke kaart een positief reëel getal. Speler A begint, en elk om beurt mogen ze de bovenste kaart voor zich nemen, of die kaart op de stapel laten. Er zijn echter twee restricties:

- Als een speler kiest om een kaart niet te pakken, moet de andere speler die kaart verplicht nemen. Dit telt als de beurt van die andere speler, hierna is het dus terug aan de oorspronkelijke speler.
- Zij n een vast getal, natuurlijk of oneindig. Dan is het voor elke speler niet toegestaan om meer dan n keer achter elkaar een kaart niet te nemen.

Dit doen ze tot alle kaarten weg zijn. Alle kaarten en hun bijhorende getallen zijn vanaf het begin van het spel ook gekend.

De score van elke speler is de som van de getallen op de door hem gekozen kaarten. De winnaar is de speler die op het einde van het spel de hoogste score heeft. Als beide spelers dezelfde score hebben, is het een gelijkspel.

(a) Stel dat n eindig is. Voor welke waarden van n kan A er altijd voor zorgen dat hij niet verliest (ongeacht het aantal kaarten in het spel en de waarde van die kaarten)? *(3 punten)*

(b) Stel dat n oneindig is, dus dat de tweede restrictie wegvalt. Kan A dan altijd voor een overwinning of gelijkspel zorgen? *(7 punten)*

6 Polyvalente polynomen

Als $A \subset \mathbb{N}$ een eindige verzameling is, kunnen we op de volgende manier een veelterm $A(x)$ met natuurlijke coëfficiënten definiëren: $A(x) = \sum_{a \in A} x^a$. Zij A en B zulke eindige verzamelingen, met bijhorende veeltermen $A(x)$ en $B(x)$, en stel $n = A(1)B(1)$.

Als $A(x)B(x) \equiv 1 + x + \cdots + x^{n-1} \pmod{x^n - 1}$ en het priemgetal p is geen deler van $A(1)$, bewijs dan dat $A(x^p)B(x) \equiv 1 + x + \cdots + x^{n-1} \pmod{x^n - 1}$