



# PUMAthematics

## 25 februari 2020

### Oplossingen

#### 1 Sprookjesachtige veelterm

Sneeuwwitje kan altijd winnen.

Sneeuwwitje kan  $b$  altijd zó kiezen dat als  $r$  een nulpunt is van  $f$ , dan  $s$  ook een nulpunt is. De som van de nulpunten van  $f$ —als ze bestaan—is namelijk steeds  $-b/a$ , tenzij  $a = 0$ . Als  $a \neq 0$  kan ze winnen indien  $-b/a = r + s$ . Ingeval  $a = 0$  kan ze  $b = 0$  kiezen en wordt  $f(x) = c$ , wat ook een winsituatie is. Samengevat leidt de keuze  $b = -(r + s)a$  steeds tot overwinning.

#### 2 Geflippte recursie

- De rij  $(1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, 1/4, 0, \dots)$  is positief en convergeert naar nul. De geassocieerde rij  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heeft de partielsommen van de harmonische reeks als deelrij op de oneven posities en is dus onbegrensd.
- Als  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  begrensd is heeft  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  een convergente deelrij wegens de stelling van Bolzano-Weierstrass. Stel dus dat de rij onbegrensd is. Dan bestaat er voor elke  $k \in \mathbb{N}$  een index  $n_k \in \mathbb{N}$  waarvoor  $b_{n_k} > k$  (en inductief  $n_k > n_{k-1}$ ). De deelrij  $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  divergeert naar  $+\infty$ , wat impliceert dat  $(1/b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergeert naar nul. De deelrij  $(b_{n_k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  zal op zijn beurt convergeren naar

#### 3 Teamwork makes the dream work

**Oplossing 1** Elke vraag werd opgelost door minstens 10 personen, dus werden er in totaal minstens  $60 = 17 \cdot 3 + 9$  vragen opgelost. Wegens het *duivenhokprincipe* is er iemand die minstens 4 vragen juist had. De overige twee vragen zijn samen minstens 20 keer opgelost. Volledig analoog volgt uit het *duivenhokprincipe* dat er iemand is die die twee vragen heeft opgelost.



PUMAthematics

25 februari 2020

**Oplossing 2** Stel  $P$  de verzameling van paren  $\{x, y\}$  van (verschillende) deelnemers. Stel voor  $i \in \{1, \dots, 6\}$   $P_i \subseteq P$  de verzameling van paren  $\{x, y\}$  van deelnemers die beiden vraag  $i$  niet hebben opgelost. Dan is  $|P_i| \leq \binom{17-10}{2} = 21$  zodat

$$\left| \bigcup_{i=1}^6 P_i \right| \leq 6 \cdot 21 = 126 < 136 = \binom{17}{2} = |P|.$$

Er zijn dus minstens 10 elementen in  $P$  die bevat zijn in geen enkele  $P_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$ . Er zijn met andere woorden minstens 10 paren van deelnemers die samen alle vragen juist hadden.

#### 4 Eigen(w)aardige matrix

Zij  $v$  een eigenvector van  $A$  bij  $\lambda$ . Door desnoods  $v' = \frac{v}{\sqrt{v^T v}}$  te stellen mogen we aannemen dat  $v^T v = 1$ . Nu is

$$\begin{aligned} A^2 + I &= 2A^T \\ \implies v^T(A^2 + I)v &= v^T(2A^T)v \\ \implies v^T A(Av) + v^T v &= 2(Av)^T v \\ \implies \lambda v^T A v + 1 &= 2\lambda v^T v \\ \implies \lambda^2 + 1 &= 2\lambda \end{aligned}$$

waarbij gebruik gemaakt is van  $Av = \lambda v$  ( $A$  is reëel). Schrijven we  $\lambda$  als  $a + bi$ , dan bekomen we een stelsel met oplossingen  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = -1 - 2i$  en  $\lambda = -1 + 2i$ .

We moeten nu alleen nog nagaan dat die waarden van  $\lambda$  ook voorkomen als eigenwaarden van een matrix  $A$  die aan het gegeven voldoet. Een voorbeeld van zo'n matrices zijn de eenheidsmatrix en

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

#### 5 Sommatie-informatie

Merk op dat voor elke  $i \in \{1, \dots, n\}$ :

$$-x_i^3 + \frac{3}{4}x_i y_i^2 + \frac{1}{4}y_i^3 = (y_i - x_i)(x_i + \frac{1}{2}y_i)^2 \geq 0.$$



PUMA<sup>thematics</sup>

25 februari 2020

Sommeren we die ongelijkheden, dan vinden we

$$0 \leq \sum_{i=1}^n x_i^3 + \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n x_i y_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} y_i^3.$$

Onder de gestelde voorwaarden volgt daaruit meteen het te bewijzen.

## 6 Lineair denken

We bewijzen de bewering via *sterke inductie op k*.

- $k = 1$ :

Als  $f_1 = 0$  volgt direct  $f = 0$ .

Als  $f_1 \neq 0$  bestaat er een  $v_1 \in V$  waarvoor  $f_1(v_1) = 1$  (herschaaft desnoods). Kies willekeurig  $v \in V$ . Gebruik makend van de lineariteit vinden we

$$\begin{aligned} f_1(v - v_1 f_1(v)) &= f_1(v) - f_1(v) = 0 \\ \implies f(v - v_1 f_1(v)) &= 0 \quad (\text{gegeven}) \\ \implies f(v) &= f(v_1) f_1(v) \\ \implies f &= f(v_1) f_1 \quad (v \text{ was willekeurig}) \end{aligned}$$

- Als het geldt voor  $k' < k$ , dan ook voor  $k$ :

Als  $f_1, f_2, \dots$  en  $f_k$  lineair afhankelijk zijn, beschouw dan een lineair onafhankelijke deelverzameling van die functies en pas daarop de inductiehypothese toe.

Als  $f_1, f_2, \dots$  en  $f_k$  lineair onafhankelijk zijn bestaat er voor elke  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  een  $v_i$  waarvoor

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j \end{cases}.$$

Inderdaad, als dat niet het geval zou zijn is  $f_i$  een lineaire combinatie van de overige  $f_j$ 's wegens de inductiehypothese. Kies willekeurig  $v \in V$ . Analoog zoals hierboven hebben we

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, k\} : f_i(v - v_1 f_1(v) - v_2 f_2(v) - \dots - v_k f_k(v)) &= f_i(v) - f_i(v_1) f_1(v) = 0 \\ \implies f(v - v_1 f_1(v) - v_2 f_2(v) - \dots - v_k f_k(v)) &= 0 \\ \implies f(v) &= f(v_1) f_1(v) + f(v_2) f_2(v) + \dots + f(v_k) f_k(v) \\ \implies f &= f(v_1) f_1 + f(v_2) f_2 + \dots + f(v_k) f_k. \end{aligned}$$