



PUMAthematics

25 februari 2020

Wedstrijdreglement

- (a) De competitie bevat zes vragen, die elk op evenveel punten staan. Je krijgt 210 minuten de tijd om zo veel mogelijk vragen correct op te lossen.
- (b) Handboeken, rekenmachines, gsm's en andere hulpmiddelen zijn hierbij niet toegestaan. Enkel pen en papier mogen gebruikt worden.
- (c) Vermeld op ieder ingediend blad duidelijk je naam en het volgnummer van de vraag, en op minstens één blad ook je jaar en richting.
- (d) Bij verdere vragen of betwistingen is uitsluitend de jury bevoegd.
- (e) Door deel te nemen aan de PUMA 2020 verklaart men zich akkoord met dit reglement.
- (f) Veel plezier en veel succes!

De proclamatie van deze wedstrijd gaat door op vrijdag 13 maart 2020 om 13:00 in gebouw S9, auditorium A3. Beschouw dit gerust als een uitnodiging. Zoals vorig jaar combineren we de proclamatie met een pizzafestijn. Wil je een pizza bestellen, dan kan je dat op voorhand op onze website ingeven. Verdere informatie verschijnt tijdig op onze website: <http://prime.ugent.be>.



PUMAthematics

25 februari 2020

Vragen

1 Sprookjesachtige veelterm

Zij $r, s \in \mathbb{R}$ twee verschillende getallen en $f(x) = ax^2 + bx + c$ een veelterm met coëfficiënten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Roodkapje en Sneeuwwitje spelen het volgende spelletje. Roodkapje begint en kiest een waarde voor a . Dan is het aan Sneeuwwitje: zij bepaalt een waarde voor b . Tot slot is het opnieuw Roodkapjes beurt: zij kiest de waarde van c , waarna f uniek bepaald is. Als ze ervoor kan zorgen dat $f(r) = 0$ en $f(s) \neq 0$ wint ze het spel. Sneeuwwitje daarentegen wint als $f(s) = 0$ of $f(r) \neq 0$.

Bestaat er een winnende strategie voor één van beiden? Zo ja, welke?

2 Geflipte recursie

Zij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een convergente rij in $\mathbb{R}$ met $a_0 > 0$ en $a_i \geq 0$ voor $i > 0$. Definieer de rij $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ recursief als volgt:

$$b_0 := a_0$$

$$b_n := \frac{1}{b_{n-1}} + a_n \quad (n > 0)$$

(a) Geef een voorbeeld van een rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ waarvoor $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onbegrensd is.

(b) Bewijs dat $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ steeds een convergente deelrij heeft.

3 Teamwork makes the dream work

Op de 10e editie van de PUMA waren 17 deelnemers aanwezig. Zoals gewoonlijk werden er 6 vragen gesteld. Dat jaar was er ook iets bijzonders aan de gang: voor elke vraag waren er minstens 10 personen die hem correct beantwoordden.

Toon aan dat er 2 deelnemers waren die samen alle vragen juist hadden.



PUMAthematics

25 februari 2020

4 Eigen(w)aardige matrix

Bepaal alle mogelijke waarden van $\lambda \in \mathbb{C}$ waarvoor er een reële vierkante matrix A bestaat met $A^2 + I = 2A^T$ en λ een eigenwaarde is van A .

5 Sommatie-informatie

Zij $n \in \mathbb{N}_{>0}$ en $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ en $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ twee rijen van reële getallen waarvoor

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i \leq y_i$$

en

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i^2 = 0.$$

Toon aan dat

$$4 \sum_{i=1}^n x_i^3 \leq \sum_{i=1}^n y_i^3.$$

6 Lineair denken

Zij V een $\mathbb{R}$ -vectorruimte en $f_1, f_2, \dots, f_k$ en f lineaire afbeeldingen $V \rightarrow \mathbb{R}$ met de eigenschap dat

$$f_1(v) = f_2(v) = \dots = f_k(v) = 0 \implies f(v) = 0$$

voor alle $v \in V$. Bewijs dat f een lineaire combinatie is van $f_1, f_2, \dots$ en f_k .