



PUMAthematics

3 maart 2022

Oplossingen

1 Elke deelvraag telt

- Dubbele telling van de elementen in $\{(ribbe, vlak) | ribbe \in vlak\}$ geeft $\#ribben \times 2 = \#vlakken \times 4$ zodat $\#ribben = 2 \times \#vlakken = 60$.
- Uit de formule van Euler voor convexe veelvlakken volgt onmiddellijk $\#hoeken = 32$.
- Zij x het aantal hoeken die grenzen aan 3 vlakken en y het aantal hoeken die grenzen aan 5 vlakken. Dubbele telling van de elementen in $\{(hoek, vlak) | hoek \in vlak\}$ geeft $3x + 5y = 30 \cdot 4 = 120$. Wegens het vorige is $x + y = 32$. We krijgen dus een stelsel van twee vergelijkingen met als oplossing $x = 20$ en $y = 12$.

2 Decimale doordenker

Laten we eerst de som van 0 tot en met $10^{2022} - 1$ maken. Omdat elk getal 2022 digits heeft (eventueel met nullen vooraan), zijn er in totaal $2022 \cdot 10^{2022}$ termen. Op elke digit komen de cijfers 0 tot en met 9 evenveel keer voor (beschouw bijvoorbeeld voor elk paar cijfers de bijjectie die het ene cijfer op die plaats vervangt door het andere), zodat elk cijfer $2022 \cdot 10^{2021}$ keer optreedt in de som. De som bedraagt dus

$$2022 \cdot 10^{2021} \cdot (0 + 1 + \dots + 9) + 1 = 2022 \cdot 10^{2021} \cdot 45 + 1 = 9099 \cdot 10^{2022} + 1$$

waarbij we nog een 1 hebben opgeteld voor het laatste getal 10^{2022} .

3 Superioriteitscomplex

Stel eerst $y = 0$. Dan volgt

$$f(x) = f(x)f(0)$$

voor alle x , waaruit $f(0) = 1$ (want $f \neq 0$). Stel vervolgens $y = -x$. Dan volgt

$$f(0) = f(x)f(-x) = x^2$$



PUMAthematics

3 maart 2022

en $x = i$ invullen levert

$$f(i)f(-i) = 0$$

zodat ofwel $f(i) = 0$ ofwel $f(-i) = 0$. In het eerste geval kunnen we $y = i$ invullen in de functievergelijking, wat resulteert in

$$f(x+i) = ix$$

m.a.w.

$$f(x) = ix + 1.$$

In het andere geval kunnen we $y = -i$ stellen om

$$f(x) = -ix - 1$$

te vinden.

Deze functies invullen in de functievergelijking geeft ook dat ze effectief oplossingen zijn.

4 Faculteiten!

De enige oplossing is $(3,3,4)$.

Wegens de symmetrie in a en b mogen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $a \leq b$. Door de vergelijking modulo $a!$ te beschouwen, zien we dat

$$c! \equiv 0 \pmod{a!}$$

en $c!$ dus een veelvoud is van $a!$, m.a.w. $a \leq c$. We beschouwen nu twee gevallen.

- $b \leq c$: Neem ditmaal de vergelijking modulo $b!$, zodat

$$a! \equiv 0 \pmod{b!}$$

en bijgevolg $a = b$. Delen we de gegeven vergelijking door $a!$, dan is

$$a! = 2 + \frac{c!}{a!} = 2 + c(c-1) \cdots (a+1).$$

Dus $a \geq 3$. In het bijzonder is $a!$ een drievoud. Maar omdat $c(c-1) \cdots (a+1)$ slechts 2 verschilt van $a!$ is dit product geen drievoud, en bevat het dus hoogstens twee factoren. Als $a \geq 5$ is $a! \geq a(a-1)3! \geq 6a^2 - 6a \geq a^2 + 25a - 6a > 2 + (a+2)(a-1)$. Er rest ons dus alleen nog de gevallen $a = 3$ en $a = 4$ na te gaan. We vullen deze in in de oorspronkelijke vergelijking en zien dat alleen $(3,3,4)$ een oplossing is.



PUMAthematics

3 maart 2022

- $c < b$: Modulo $c!$ nemen geeft

$a! \equiv 0 \pmod{c!}$ zodat noodzakelijk $a = c$. Dan vereenvoudigt de vergelijking naar $a!b! = 2a! + b!$ met $a < b$. Voor $a \leq 2$ is er geen oplossing, terwijl voor $a \geq 3$ geldt dat $a!b! \geq 3b! > 2a! + b!$. Dit geval doet zich dus nooit voor.

5 Screensaver

- Stel dat het oneindig lang duurt. Dan is er een diagonaal die oneindig vaak bezocht wordt. Bijgevolg worden ook beide diagonalen die hiermee een hoek van 90° vormen oneindig vaak bezocht: men moet er immers op en af kunnen geraken. Zo kunnen we op ons stappen terugkeren om te besluiten dat de eerste diagonaal oneindig vaak werd bezocht. Maar dan werd de pixel in de linkerbovenhoek ook oneindig vaak bezocht, een strijdigheid.
- Kleur elke pixel wit of zwart volgens een schaakbordpatroon, waarbij het hoekpunt waarin het blokje begint, wit is. Dan zal het blokje nooit de witte pixels kunnen verlaten. We onderscheiden twee gevallen.
 - mn is even: In dit geval zijn er evenveel witte als zwarte pixels en kan duidelijk maar de helft van de punten bezocht worden.
 - mn is oneven: Nu is het aantal witte pixels één meer dan het aantal zwarte pixels. Echter, het blokje kan slechts twee hoekpunten bezoeken, en alle hoekpunten zijn wit. Het aantal bezochte witte pixels is dus naar boven begrensd door het aantal zwarte pixels min één.
- Exact die koppels waarvoor $\gcd(m-1, n-1) = 1$ voldoen aan de voorwaarde.

Lemma.: Zij $m < n$. Dan voldoet (m, n) als en slechts als $(m, n - m + 1)$ voldoet.

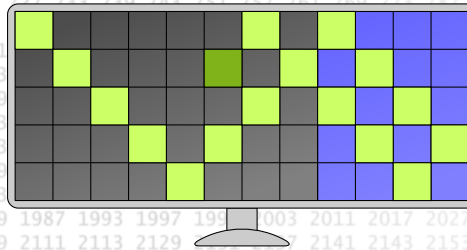
Bewijs: Beschouw een scherm van m bij $n - m + 1$ pixels en vul het aan tot een scherm van m bij n . Er is dan een verschil in welke weg we nemen exact als we op een pixel van de vroegere rechtse rand terechtkomen. Stel dat een zekere pixel hierop bereikt wordt. Merk op dat we dit als een pixel op de linkerrand van een (m, m) -scherm kunnen beschouwen. Wegens de symmetrie hiervan kan men inzien dat het blokje na exact vier diagonalen te hebben aangedaan terug bij het originele punt komt, loodrecht op de oorspronkelijke richting. Vanaf dan is er geen onderscheid meer te maken met de weg die het in het begin zou hebben genomen.



PUMA_{thematics}

3 maart 2022

Zo kunnen we verder gaan. Omdat in het (n, n) -diagram alle witte (cfr. vorige puntje) pixels van de linkse rand worden aangedaan in beide richtingen, worden ook alle witte pixels van het rechtse deel aangedaan. Omgekeerd, wanneer alle witte pixels van het samengestelde scherm worden bezocht, is dat ook zo voor het linkerscherf. $\square$



Uit het lemma volgt nu dat we telkens de transformaties $(m, n) \rightarrow (m, n - m + 1)$ en $(m, n) \rightarrow (n, m)$ kunnen toepassen tot we een gelijkheid hebben. Hierbij blijft $\text{ggd}(m - 1, n - 1)$ invariant! Wanneer $m = n$, voldoet duidelijk alleen $m = n = 2$ aan de eigenschap. Dan is $\text{ggd}(m - 1, n - 1) = 1$. Omgekeerd zal de grootste gemene deler 1 zijn als $m = n = 2$.

6 Eigenwaardige eigenschap

Zij $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het standaard inproduct met norm $\|\cdot\|$. We bewijzen eerst een lemma.

Lemma. Indien Q een reële, symmetrische $n \times n$ -matrix met alle eigenwaarden groter dan 1 is, geldt dat voor alle $v \in \mathbb{R}^n$, $\|Q \cdot v\| > \|v\|$.

Bewijs: Zij $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de eigenwaarden van Q . De spectraalstelling voor symmetrische matrices garandeert dat er n zo'n reële eigenwaarden zijn, en dat we tevens een orthonormale basis van eigenvectoren ten opzichte van het standaard inproduct kunnen vinden. Zij $e_1, e_2, \dots, e_n$ die orthonormale basis, zodanig dat e_i een eigenvector bij de eigenwaarde λ_i is.

Kies nu willekeurig $v \in \mathbb{R}^n$. We kunnen v schrijven als lineaire combinatie van $e_1, \dots, e_n$. Stel dat $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$. Uit de definitie van eigenvectoren volgt dat $Q \cdot v = \lambda_1 \alpha_1 e_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n e_n$. Omdat $e_1, \dots, e_n$ een orthonormale basis is, geldt dat $\|Q \cdot v\| = \sqrt{\alpha_1^2 \lambda_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n^2} > \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2} = \|v\|$ omdat alle $\lambda_i > 1$. $\square$

Stel dat λ een eigenwaarde is van AB met eigenvector v . Wegens het lemma geldt dat $\|AB \cdot v\| > \|B \cdot v\| > \|v\|$. Maar $\|AB \cdot v\| = |\lambda| \|v\|$. Omdat v een eigenvector is, moet $\|v\| > 0$. Bijgevolg is $|\lambda| > 1$.