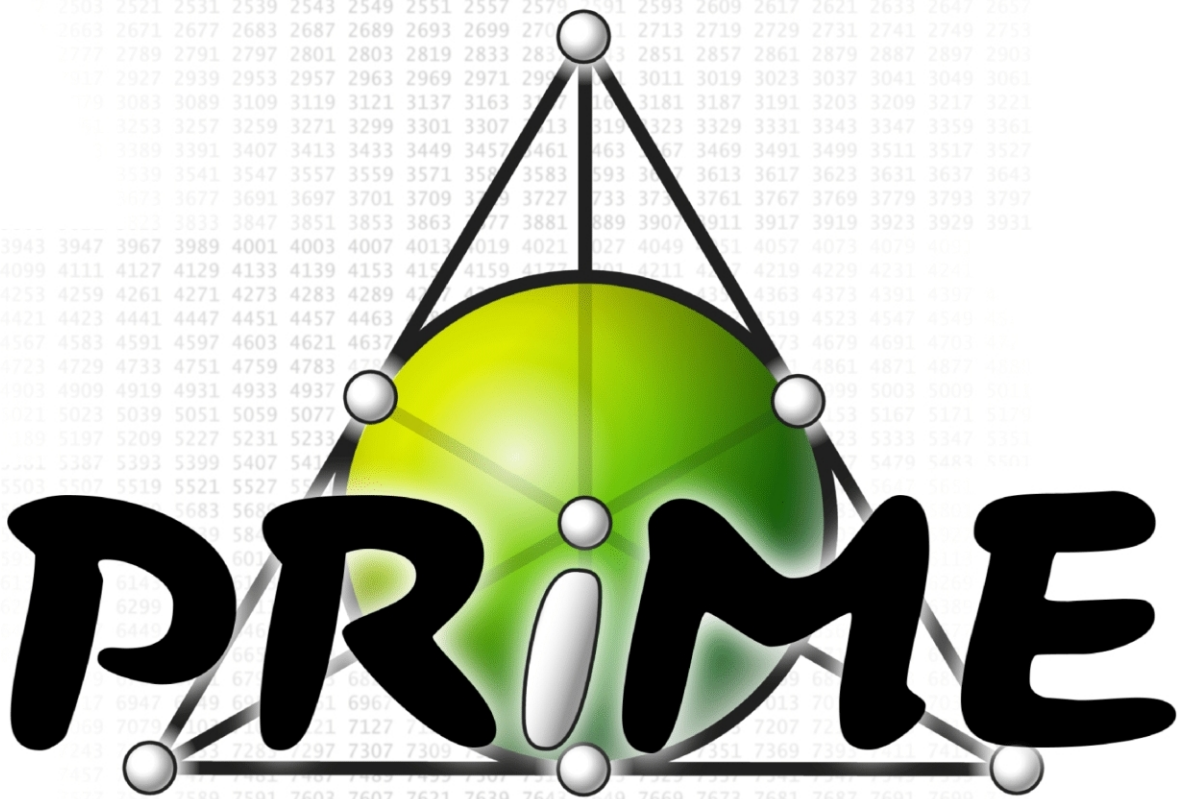


PUMA *thematics*

3 maart 2022



Sponsored by



PUMA *thematics*

3 maart 2022

Wedstrijdreglement

- (a) De competitie bevat zes vragen, die elk op 10 punten staan. Je krijgt 180 minuten de tijd om zo veel mogelijk vragen correct op te lossen.
- (b) Vermeld op elk ingediend blad duidelijk je naam en het volgnummer van de vraag, en op minstens een blad ook je jaar en richting. Indien je een vraag open laat, gelieve dat dan duidelijk te maken.
- (c) Handboeken, rekenmachines, gsm's en andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan. Enkel pen en papier mogen gebruikt worden.
- (d) Bij verdere vragen of betwistingen is uitsluitend de jury bevoegd.
- (e) Door deel te nemen aan de PUMA 2022 verklaart men zich akkoord met dit reglement.
- (f) Veel plezier en veel succes!

PRIME

Sponsored by

RESEARCH

De proclamatie van deze wedstrijd gaat door op woensdag 9 maart om 18:30 tijdens onze *spelletjesavond*. Beschouw dit gerust als een uitnodiging. De proclamatie zal ook gelivestreamd worden. Verdere informatie verschijnt tijdig op onze website: <https://prime.ugent.be>.

PUMA *thematics*

3 maart 2022

Vragen

1 Elke deelvraag telt

De *formule van Euler voor convex¹ veelvlakken* stelt dat $H - R + V = 2$ voor elk convex veelvlak met H hoeken, R ribben en V vlakken. Gegeven is een convex veelvlak met 30 vlakken waarvan je weet dat alle vlakken vierhoeken zijn.

- (a) (3 punten) Hoeveel ribben heeft het veelvlak?
- (b) (2 punten) Hoeveel hoeken heeft het veelvlak?
- (c) (5 punten) Gegeven dat elke hoek grenst aan juist 3 of 5 vlakken, hoeveel hoeken zijn er dan van elke soort?

PRIME

3 Superioriteitscomplex

Bepaal alle $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ functies f die voldoen aan

$$f(x+y) = f(x)f(y) + xy$$

voor alle $x, y \in \mathbb{C}$.

Sponsored by



¹Een veelvlak is convex als voor elke twee punten die het bevat, de verbindingsrechte er ook in is bevat.

PUMA *thematics*

3 maart 2022

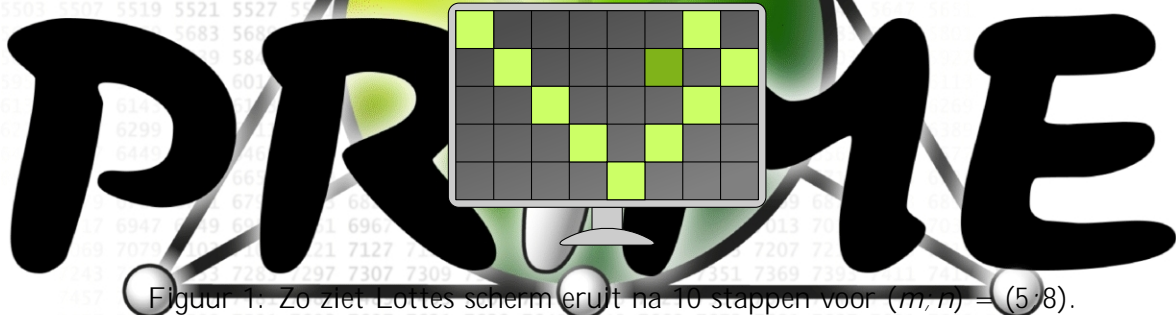
4 Faculiteiten!

Vind alle koppels $(a; b; c) \in \mathbb{N}^3$ die voldoen aan

$$a!b! = a! + b! + c!.$$

5 Screensaver

Wanneer Lotte haar computer enkele minuten niet aanraakt, gaat deze over in screensave modus. Haar scherm wordt onderverdeeld in een rooster van m bij n pixels ($m; n \geq 2$). Vanuit de linker bovenhoek verschijnt een gekleurd blokje ter grootte van een pixel, dat schuin beweegt op het scherm volgens een hoek van 45° . Wanneer het blokje aan de rand uitkomt, gaat deze verder op de diagonaal die 90° gedraaid is ten opzichte van de vorige lijn. Zo beweegt het verder tot het uiteindelijk in een hoekpunt uitkomt.



- (a) (2 punten) Bewijs dat het blokje altijd in een hoek terecht komt.
- (b) (3 punten) Bewijs dat nooit (strikt) meer dan de helft van alle pixels op het scherm door de pixel bezocht kunnen worden.
- (c) (5 punten) Bepaal alle koppels $(m; n)$ waarvoor exact de helft van alle pixels bezocht kunnen worden.

Sponsored by

RESEARCH

6 Eigenwaardige eigenschap

Zij A en B reële symmetrische matrices waarvan alle eigenwaarden strikt groter zijn dan 1. Bewijs dat voor iedere eigenwaarde λ van AB geldt dat $j \lambda > 1$.