1 Oplossing breinbreker februari-maart 2022

Noem Z de stochast die de oppervlakte van de driehoek weergeeft en X de stochast die de positie van het eerste breekpunt weergeeft. Definieer

$$Y := \begin{cases} X & \text{als } X \leq 0.5 \\ 1 - X & \text{als } X > 0.5 \end{cases} .$$

De stukken vormen dan een gelijkbenige driehoek met zijdes Y, $\frac{1-Y}{2}$ en $\frac{1-Y}{2}$. De hoogte H van deze driehoek kunnen we met de stelling van Pythagoras bepalen: $H^2 + \left(\frac{1-Y}{2}\right)^2 = \left(\frac{Y}{2}\right)^2$. Dus $H = \frac{\sqrt{1-2Y}}{2}$. De oppervlakte is dan $Z = \frac{Y\sqrt{1-2Y}}{4}$. Voor het gemiddelde geldt $E(Y) = E(g(X)) = \int g(x)\, dF(x) = \int_0^1 g(x)\, dx$ voor een meetbare functie g, want X is uniform verdeeld op $[0, 1]$. We kunnen nu $E(Y)$ berekenen:

$$E(Y) = \int_0^1 \begin{cases} \frac{x\sqrt{1-2x}}{4} & \text{if } x \leq 0.5 \\ \frac{(1-x)\sqrt{2x-1}}{4} & \text{if } x > 0.5 \end{cases} dx = 2\int_0^{0.5} \frac{x\sqrt{1-2x}}{4}\, dx = \frac{1}{30}$$