Oplossing breinbreker februari-maart 2023

Oplossing 1

Het is altijd mogelijk om alle lichten aan te steken.

We gebruiken grafen om dit probleem te visualiseren, elke kamer is een top. Er bestaat een boog tussen 2 toppen juist als die kamers door een gang verbonden zijn. We gebruiken een top aansteken in plaats van het licht in de bijhorende kamer aansteken. De graaf van alle toppen noemen we Γ.

We bewijzen dit per inductie. Voor 1 top is het duidelijk. Stel nu dat er n toppen zijn. Men kan elke willekeurige verzameling van $n-1$ toppen aansteken, wegens de inductiehypothese. Als er een keuze voor $n-1$ toppen bestaat zodat, als je die toppen aansteekt, de overblijvende top ook aan is, dan zijn we klaar. Neem dus aan dat dat niet zo is. Dan kunnen we dus voor elke top v alle toppen behalve v aansteken.

Stel n is even. Steek dan voor elke top v in de graaf alles behalve v aan. Dan wordt elke top juist $n-1$ keer geswitcht (1 keer voor elke andere top in Γ). Aangezien dit oneven is, staat elke top dus aan.

Stel n is oneven. Dan weten we uit grafentheorie dat er een top v is met even graad (want de som van de graden is 2 keer het aantal bogen en dus even). Zij T de graaf opgespannen door v en al zijn buren. Dan is $|T|$ oneven en $|\Gamma - T|$ even. Steek dan voor elke top w in $\Gamma - T$ alle toppen behalve w aan. Dan staan alle toppen in $\Gamma - T$ aan want zij worden $|\Gamma - T| - 1$ keer geswitched (1 keer voor elke andere top in $\Gamma - T$). De toppen in T staan dan allemaal uit, want ze worden $|\Gamma - T|$ keer geswitched (1 keer voor elke top in $\Gamma - T$). Als men dan nog de schakelaar van v omlegt, worden alle toppen in T aangezet en de toppen van $\Gamma - T$ invariant gelaten en dan staan dus alle toppen aan. $\square$

Oplossing 2 (met dank aan Sam Adriaensen voor deze oplossing)

Nummer de kamers van k_1 tot k_n. Maak de $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ met

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \text{ of als } k_i \text{ en } k_j \text{ verbonden zijn via een gang,} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Merk op dat A symmetrisch is. Stel S een deelverzameling van de kamers en x een vector van lengte n met

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{als } k_i \in S, \\ 0 & \text{als } k_i \notin S. \end{cases}$$

Beschouw A en x over $\mathbb{F}_2$. Dan staan alle lichten aan na het aanzetten van de schakelaars die overeenkomen met de kamers in S als en slechts als $Ax = \mathbf{1}$, met $\mathbf{1}$ de constante vector met overal enen. Er bestaat een vector x met $Ax = \mathbf{1}$ als en slechts als $\mathbf{1} \in \mathrm{Im}(A)$ als en slechts als $\mathrm{Im}(A)^\perp \leq \langle \mathbf{1} \rangle^\perp$, met $\perp$ het orthogonaal complement t.o.v. het standaard scalair product $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Neem $y \in \mathrm{Im}(A)^\perp = \ker(A)$ (aangezien A symmetrisch is). Dan is $Ay = \mathbf{0}$, dus $y^T A y = 0$.

Merk op dat

$$0 = y^T A y = \sum_{i,j=1}^{n} y_i a_{ij} y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ii} y_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} y_i y_j = \sum_{i=1}^{n} y_i = y \cdot \mathbf{1},$$

waarbij we gebruiken dat A symmetrisch, dat $a_{ii} = 1$ voor alle $i \in \{1 \dots n\}$ en dat we werken over $\mathbb{F}_2$. Dit bewijst dat $y \in \langle \mathbf{1} \rangle^\perp$ en aangezien $y \in \mathrm{Im}(A)$ willekeurig geldt dus $\mathrm{Im}(A)^\perp \leq \langle \mathbf{1} \rangle^\perp$.

Men kan dus altijd alle lichten in alle kamers aansteken. $\square$