Oplossing Breinbreker novermber-december 2022

Oplossing 1

Kies een (bewegend) assenstelsel zo dat de positie van Wannes altijd overeenkomt met de oorsprong en dat de x-as ligt volgens de verbindingslijn tussen de positie van Oscar en die van Wannes.

Aangezien de snelheidsvector op elk moment volgens die verbindingslijn ligt zal Oscar zich op de volgens de x-as naar Wannes toe bewegen. Stel iedereen beweegt zich voort met snelheid v, dan zal Oscar de 10 meter tussen hem en Wannes in $\frac{10}{v}$ seconden overbruggen, met andere woorden: Oscar zal $\frac{10}{v}$ seconden nodig hebben om Wannes te bereiken (dit mag omdat de snelheidsvector altijd volgens de x-as gelegen is, Oscar beweegt zich dus lineair op de x-as voort).

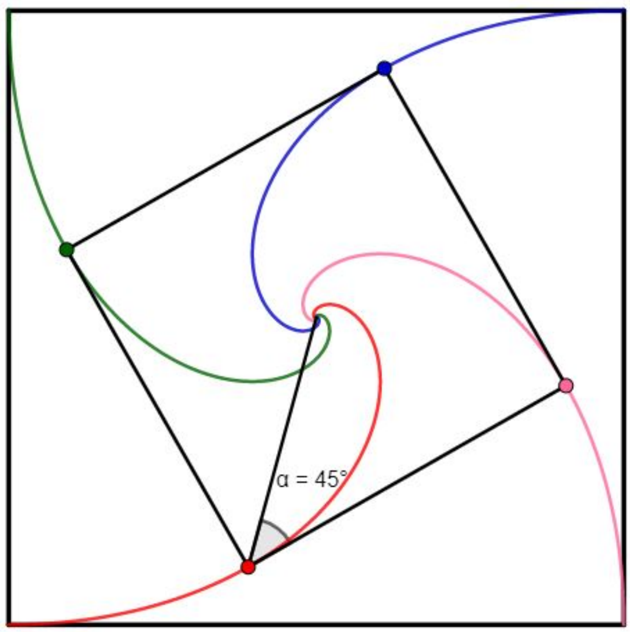
Keren we nu terug naar ons probleem. Iedereen beweegt met snelheid v en na $\frac{10}{v}$ seconden bereikt Oscar Wannes. Dat betekent dat Oscar juist $v \cdot \frac{10}{v} = 10$ meter heeft afgelegd.

Oplossing 2

Analoog zoals in de cursus differentiaalmeetkunde worden krommen en vectoren met vetgedrukte letters aangeduid en $\dot{\mathbf{c}} := \frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t}$. Er is geen verdere voorkennis differentiaalmeetkunde vereist om deze oplossing te begrijpen.

Noem de positie van Oscar $\mathbf{O}(t)$ en die van Wannes $\mathbf{W}(t)$ met t de tijd die ze gelopen hebben. Noem het midden van het vierkant M en noem de snelheid van de 4 bestuursleden v.

Door symmetrie vormen Oscar, Wannes, Vincent en Wouter op elk moment van het vraagstuk een vierkant. Omdat Oscar zich altijd in de richting van Wannes beweegt, zal zijn snelheidsvector dus altijd een hoek van 45° vormen met de verbindingslijn van M en $\mathbf{O}(t)$.



Figuur 1: 45° hoek

Dit motiveert dat we $\mathbf{O}(t)$ in poolcoördinaten met M als pool proberen uit te drukken. Want stel $\mathbf{O}(t) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ met r en θ afhankelijk van t, dan is $\dot{\mathbf{O}}(t) = \dot{r}(\cos\theta, \sin\theta) + r\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ met $\mathbf{e}_r \coloneqq (\cos\theta, \sin\theta)$ en $\mathbf{e}_\theta \coloneqq (-\sin\theta, \cos\theta)$. Merk op dat $\mathbf{e}_r$ en $\mathbf{e}_\theta$ een orthonormale basis vormen.

Dus de snelheidsvector $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{O}}(t) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$. Maar omdat $\mathbf{e}_r$ volgens de verbindingslijn van M en $\dot{\mathbf{O}}(t)$ ligt en omdat $\|\mathbf{v}(t)\| = v$, vinden we dat $\mathbf{v}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}v\mathbf{e}_r + \frac{\sqrt{2}}{2}v\mathbf{e}_\theta$. We halen daaruit dat $\dot{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}v \Rightarrow r(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}vt + r(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}vt + 5\sqrt{2}$ want Oscar start op $5\sqrt{2}$ meter van het midden van M.

Nu zoeken we wanneer Oscar Wannes bereikt: dit is hetzelfde als wanneer $r(t) = 0$. Dit gebeurt juist als $t = \frac{10}{v}$. Hij moet $\frac{10}{v}$ seconden lopen aan een snelheid van v meter per seconde. Hij loopt dus $\frac{10}{v} \cdot v = 10$ meter.