Breinbreker januari-februari: de kerstboom van de S9

Veronderstel dat er n lampjes zijn. We nummeren de lampjes (en hun knopjes) van 1 tot n. We spreken af dat elk lampje verbonden is met zichzelf, zo kunnen we zeggen dat een lampje verandert van toestand als en slechts als het knopje van een lampje dat ermee verbonden is, wordt ingedrukt. Laten we nu een $n \times n$ matrix A opstellen die de verbindingen tussen de lampjes voorstelt. We stellen $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ als volgt op: als het i-de lampje verbonden is met het j-de lampje dan stellen we $a_{ij} = 1$, als ze niet verbonden zijn dan stellen we $a_{ij} = 0$. Als het i-de lampje met het j-de verbonden is dan geldt het omgekeerde ook, dus $\forall i, j \in \{1, ..., n\} | a_{ij} = a_{ji}$. Elk lampje is verbonden met zichzelf dus $\forall i \in \{1, ..., n\} | a_{ii} = 1$. We zullen de i-de rij van A noteren als: $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$.
De volgorde waarin we knopjes indrukken speelt geen rol. Het is dus zinvol om de kolommatrix $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ op te stellen waarin we x_i gelijk stellen aan het aantal keer dat we op het i-de knopje drukken.

In het begin staan alle lampjes uit, een lampje zal dus branden als ze een oneven aantal keer van toestand verandert. Het aantal keer dat het i-de lampje van toestand verandert, is $A_i \cdot X = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$. We tonen dit aan: Het bijdrage aan deze som van een knopje (stel het k-de) dat niet met dit lampje verbonden is, is altijd 0 want dan is $a_{ik} = 0$. Het bijdrage van een knopje (stel het l-de) dat wel met dit lampje verbonden is, is x_l (want $a_{il} = 1$). Elke bijdrage representeert het aantal keer dat het lampje ten gevolge van dit ene knopje van toestand verandert. De som van deze bijdrages ($A_i \cdot X$) is dus het totaal aantal keer dat het lampje van toestand verandert. Het i-de lampje brandt dus als en slechts als $A_i \cdot X \equiv 1 \ (mod\ 2)$.
Als we willen dat alle lampjes aan staan na het indrukken van bepaalde knopjes, moeten we een X vinden (voor de gegeven matrix A) waarvoor $\forall i \in \{1, ..., n\} | A_i \cdot X \equiv 1 \ (mod\ 2)$. Dit stelsel van vergelijkingen kan men ook schrijven als een matrixvergelijking:

$$A \cdot X \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \ (mod\ 2)$$

Als we een X kunnen vinden die aan deze matrixvergelijking voldoet is het probleem opgelost. Alle lampjes zullen namelijk branden als we x_k keer op k-de knopje drukken. In de praktijk kunnen de knopjes waarvoor x_k oneven is 1 keer indrukken en de andere knopjes niet indrukken, omdat het 2 keer indrukken van hetzelfde knopje geen effect heeft (alle lampjes die ermee verbonden zijn, veranderen 2 keer van toestand).
Als we nu kunnen bewijzen dat dit stelsel nooit strijdig is, dan weten we dat er altijd een X bestaat die aangeeft welke knopjes we moeten indrukken opdat alle lampjes zouden branden. We bewijzen dit vanuit het ongerijmde.

Onderstel dat de matrixvergelijking (of het overeenstemmende stelsel van vergelijkingen) strijdig is. Om de matrixvergelijking op te lossen kunnen we het rijreductie algoritme toepassen op

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 1 \end{array}\right) \ (mod\ 2).$$

We hebben het stelsel strijdig verondersteld, we zullen dus een rij vinden die gelijk is aan $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$. We hebben dus door de rijen bij elkaar op te tellen en ze te vermenigvuldigen met constanten een lineaire combinatie van de rijen gevonden die gelijk is aan $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$. Met andere woorden, er bestaat een n-tal $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{F}_2^n$ zodat enerzijds $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot A_i \equiv (0, 0, ..., 0) \ \ (mod\ 2)$ en anderzijds $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot 1 \equiv 1 \ \ (mod\ 2)$. Uit de laatste som weten we dat $\lambda_i \equiv 1\ (mod\ 2)$ geldt voor een oneven aantal i's, noem dit aantal k. We kunnen nu $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_n A_n \equiv (0, 0, ..., 0)\ (mod\ 2)$ herschrijven als $A_{m_1} + A_{m_2} + ... + A_{m_k} \equiv (0, 0, ..., 0)\ (mod\ 2)$ met $\{m_1, m_2, ..., m_k\} = \{i | \lambda_i \equiv 1\ (mod\ 2)\}$. We spreken af dat $m_1 < m_2 < ... < m_k$. Beschouw nu de matrix A', als volgt gedefinieerd:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{m_1,m_1} & a_{m_1,m_2} & \cdots & a_{m_1,m_k} \\ a_{m_2,m_1} & a_{m_2,m_2} & \cdots & a_{m_2,m_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_k,m_1} & a_{m_k,m_2} & \cdots & a_{m_k,m_k} \end{pmatrix}$$

We kunnen de som van de elementen van A' op twee manieren berekenen.
We kunnen $\sum_{l=1}^k A_{m_l} \equiv (0, 0, ..., 0)\ (mod\ 2)$ herformuleren als: $\forall i \in \{1, ..., n\} |\ \sum_{l=1}^k a_{m_l,i} \equiv 0\ (mod\ 2)$. In het bijzonder geldt dus $\forall h \in \{1, ..., k\} |\ \sum_{l=1}^k a_{m_l,m_h} \equiv 0\ (mod\ 2)$. De som van de elementen van A' is dus $\sum_{h=1}^k \sum_{l=1}^k a_{m_l,m_h} \equiv k \cdot 0 \equiv 0\ (mod\ 2)$.
We kunnen de som van de elementen van A' ook op een andere manier berekenen. We weten dat $\forall i, j | a_{ij} = a_{ji}$ en $\forall i | a_{ii} = 1$. Dus:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a_{m_1,m_2} & \cdots & a_{m_1,m_k} \\ a_{m_1,m_2} & 1 & \cdots & a_{m_2,m_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1,m_k} & a_{m_2,m_k} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

De som van de elementen van A' is dus: $k \cdot 1 + 2 \cdot \sum_{h=2}^k \sum_{l=1}^{h-1} a_{m_l,m_h} \equiv k \cdot 1 \equiv 1\ (mod\ 2)$ (rekening houdend met dat k oneven is).
We bekomen een strijdigheid: de som van de elementen van A' zou enerzijds even en anderzijds oneven zijn. We besluiten dat de assumptie dat de matrixvergelijking $A \cdot X \equiv (1, 1, ..., 1)^t$ geen oplossing heeft, tot een strijdigheid leidt. Er bestaat dus zeker een X waarmee we alle lampjes kunnen laten branden.