De paradox van Banach en Tarski

Lezing PRIME

Gent, 2011

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Stefaan Vaes*

* Met de steun van ERC Starting Grant VNALG-200749

Een kleine provocatie

De wonderbaarlijke vermenigvuldiging van het brood

En Hij beval de scharen neder te zitten op het gras, en nam de vijf broden en de twee vissen, en opwaarts ziende naar den hemel, zegende dezelve; en als Hij ze gebroken had, gaf Hij de broden den discipelen, en de discipelen aan de scharen.

En zij aten allen en werden verzadigd, en zij namen op, het overschot der brokken, twaalf volle korven. *Matteüs 14, 19-20*

De paradox van Banach en Tarski

Stelling (Stefan Banach en Alfred Tarski, 1924)

Het is mogelijk om vijf broden en twee vissen in eindig veel stukken te verdelen en deze stukken opnieuw samen te voegen tot 1000 broden en 5 vissen.

Wat wiskundiger: het is mogelijk om één massieve bol met straal 1 onder te verdelen in 5 stukken; deze 5 stukken te verschuiven en te draaien; en zo 2 massieve bollen met straal 1 te bekomen.

Toepassingen
Oplossing van de eurocrisis, redding van Dexia, enz.

Natuurlijk kan dit allemaal niet echt
De "onderverdeling" is in niet-construeerbare verzamelingen.

Een poging in de praktijk

Een normale eerste reactie: die stelling is fout

Stelling (Stefan Banach en Alfred Tarski, 1924)

Het is mogelijk om één massieve bol met straal 1 onder te verdelen in 5 stukken; deze 5 stukken te verschuiven en te draaien; en zo 2 massieve bollen met straal 1 te bekomen.

Een argument waarom deze stelling fout is.

- Neem een massieve bol B met straal 1.
- Verdeel deze bol in stukken $B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_5$.
- Veronderstel dat je B_1 en B_2 kan verschuiven en draaien tot je weer B bekomt en dat je op dezelfde manier vanuit B_3, B_4, B_5 ook B kan maken.
- Dan is $\mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(B_1) + \mathrm{vol}(B_2)$ en dan is ook $\mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(B_3) + \mathrm{vol}(B_4) + \mathrm{vol}(B_5)$.
  Dan is $\mathrm{vol}(B) = \sum_{k=1}^{5} \mathrm{vol}(B_k) = 2\,\mathrm{vol}(B)$.
  Dit is absurd.

Een analyse van ons argument

We hebben gebruik gemaakt van de volgende eigenschappen.

- Het volume $\mathrm{vol}(B)$ van een deelverzameling $B \subset \mathbb{R}^3$.
- Het volume van een disjuncte unie is gelijk aan de som van de volumes.
- Het volume is invariant onder verschuivingen en rotaties.

Cruciale fout in de redenering

Het is **onmogelijk** om op een dergelijke manier het volume te definiëren voor willekeurige deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$.

In feite: de stelling van Banach en Tarski toont precies aan dat een dergelijk volume niet bestaat.

De deelverzamelingen $B_1, \ldots, B_5$ in de stelling van Banach en Tarski zijn "niet meetbaar".

Is de stelling van Banach en Tarski wel zo vreemd?

Beschouw de verzameling $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

- We verdelen $\mathbb{N}$ als de unie van de even getallen en oneven getallen.
- De afbeelding $n \mapsto 2n$ is een bijectie tussen gans $\mathbb{N}$ en de even getallen.
- De afbeelding $n \mapsto 2n + 1$ is een bijectie tussen gans $\mathbb{N}$ en de oneven getallen.

$\rightsquigarrow$ We hebben $\mathbb{N}$ dus onderverdeeld in twee stukken en vanuit elk stuk opnieuw gans $\mathbb{N}$ gemaakt.

$\rightsquigarrow$ Een beetje flauw: dit is alleen een fenomeen van oneindigheid.

Op weg naar een bewijs: wat groepentheorie

De groep van isometrieën van $\mathbb{R}^3$

- Isometrie = afstand bewarende transformatie van $\mathbb{R}^3$.
- De samenstelling van twee isometrieën is een isometrie. De inverse van een isometrie is een isometrie. $\rightsquigarrow$ De isometrieën van $\mathbb{R}^3$ vormen een **groep**.
- Deze groep is voortgebracht door de verschuivingen, rotaties en spiegelingen.

Abstracter. Een groep Γ is een verzameling uitgerust met een associatieve vermenigvuldiging en een neutraal element zodanig dat elk element een invers heeft voor die vermenigvuldiging.

Voorbeelden. De groep $(\mathbb{Z}, +)$. De groep van inverteerbare matrices. De groep van permutaties van $\{1, \ldots, n\}$, enzovoort.

Acties van groepen op verzamelingen

Inleidende opmerking

Vaak worden groepen gedefinieerd aan de hand van hun actie op een verzameling.

- Elke isometrie g van $\mathbb{R}^3$ werkt op $\mathbb{R}^3$. Dit wil zeggen: g stuurt elk punt $x \in \mathbb{R}^3$ naar een nieuw punt $g \cdot x \in \mathbb{R}^3$.
- De groep van permutaties van $\{1, \dots, n\}$ werkt op de verzameling $\{1, \dots, n\}$: elke permutatie σ stuurt elke k naar een nieuwe $\sigma \cdot k$.

Wat abstracter. Een actie van een groep Γ op een verzameling X bestaat uit de volgende data : elke $g \in \Gamma$ stuurt elk punt $x \in X$ naar een nieuw punt $g \cdot x \in X$ zodanig dat $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ en $e \cdot x = x$.

Dit zijn de twee noties die we vanavond moeten onthouden: het concept groep en het concept actie van een groep op een verzameling.

Paradoxale partities van groepen

Definitie

We noemen een partitie $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_n$ van een groep Γ in eindig veel disjuncte deelverzamelingen Γ_i een paradoxale partitie als

- er $g_1, \ldots, g_k \in \Gamma$ bestaan zodanig dat $\Gamma = g_1\Gamma_1 \sqcup \cdots \sqcup g_k\Gamma_k$,
- er $g_{k+1}, \ldots, g_n \in \Gamma$ bestaan zodanig dat $\Gamma = g_{k+1}\Gamma_{k+1} \sqcup \cdots \sqcup g_n\Gamma_n$.

Iets intuïtiever: we kunnen de groep Γ onderverdelen in n stukken; met de eerste k stukken opnieuw gans Γ maken; en ook met de volgende $n-k$ stukken opnieuw gans Γ maken.

De notatie $g_i\Gamma_i$: in de bovenstaande definitie is Γ_i een deelverzameling van Γ en is g_i een element van Γ. We noteren met $g_i\Gamma_i$ de deelverzameling van Γ gegeven door $g_i\Gamma_i = \{g_i h \mid h \in \Gamma_i\}$.

Paradoxale partities van verzamelingen

(Disclaimer: dit wordt de moeilijkste slide voor vanavond.)

Data : een groep Γ die werkt op een verzameling X.

- We veronderstellen dat deze actie vrij is : als $g \neq e$ dan is $g \cdot x \neq x$ voor alle $x \in X$. Maw: als $g \neq e$, dan beweegt g elk punt van X.
- We veronderstellen dat de groep Γ een paradoxale partitie $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_n$ heeft.

"Constructie" :

- De verzameling X is onderverdeeld in banen. De baan van een punt $x \in X$ is de verzameling $\{g \cdot x \mid g \in \Gamma\}$.
- Kies uit elke baan precies één punt x en vorm zo $Y \subset X$.
- Definieer deelverz. $X_i \subset X$ door $X_i := \{g \cdot y \mid g \in \Gamma_i, y \in Y\}$.

Oefening : de $X_1, \ldots, X_n$ vormen een partitie van X. We hebben $X = g_1 \cdot X_1 \sqcup \cdots \sqcup g_k \cdot X_k$ en $X = g_{k+1} \cdot X_{k+1} \sqcup \cdots \sqcup g_n \cdot X_n$.

$\rightsquigarrow$ Dit doen met de actie van de isometriegroep op $\mathbb{R}^3$!

Een groep met een paradoxale decompositie

Herinner de definitie

We noemen een partitie $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_n$ van een groep Γ in eindig veel disjuncte deelverzamelingen Γ_i een paradoxale partitie als

- er $g_1, \ldots, g_k \in \Gamma$ bestaan zodanig dat $\Gamma = g_1\Gamma_1 \sqcup \cdots \sqcup g_k\Gamma_k$,
- er $g_{k+1}, \ldots, g_n \in \Gamma$ bestaan zodanig dat $\Gamma = g_{k+1}\Gamma_{k+1} \sqcup \cdots \sqcup g_n\Gamma_n$.

$\rightsquigarrow$ Een eindige groep Γ heeft nooit een paradoxale partitie: tel de elementen in Γ_i.

$\rightsquigarrow$ We construeren nu een oneindige groep die wel een paradoxale partitie heeft.

De vrije groep $\mathbb{F}_2$

- De elementen van $\mathbb{F}_2$ zijn alle woorden die je kan schrijven met het alfabet a, b, a^{-1}, b^{-1}, waarbij we opletten dat de letter a nooit gevolgd of voorafgegaan wordt door de letter a^{-1}, en hetzelfde met de letter b.
- Dus zijn bab en bab^{-1} en $aba^{-1}a^{-1}bbba$ allemaal elementen van $\mathbb{F}_2$, maar is $baa^{-1}b$ geen element van $\mathbb{F}_2$ omdat we kunnen vereenvoudigen.
- We maken van $\mathbb{F}_2$ een groep. Het product van twee woorden is gedefinieerd door de woorden aan mekaar te plakken en vervolgens te vereenvoudigen als dit nodig is.

  Voorbeeld. $bab \cdot b^{-1}a = baa$
  $bab \cdot a^{-1}b = baba^{-1}b$
  $bab \cdot b^{-1}a^{-1}b^{-1} = e$

Een paradoxale partitie van $\mathbb{F}_2$

- **Herinner:** $\mathbb{F}_2$ is de groep van de niet-vereenvoudigbare woorden die je kan schrijven met het alfabet a, b, a^{-1}, b^{-1}.
- Definieer de deelverzameling $W(a) \subset \mathbb{F}_2$ van de woorden die beginnen met de letter a.
- Analoog: de deelverzamelingen $W(a^{-1})$ en $W(b)$ en $W(b^{-1})$.
- Dan is $\mathbb{F}_2 = \{e\} \sqcup W(a) \sqcup W(a^{-1}) \sqcup W(b) \sqcup W(b^{-1})$.
- Maar evenzeer is $\mathbb{F}_2 = W(a) \sqcup aW(a^{-1})$ en $\mathbb{F}_2 = W(b) \sqcup bW(b^{-1})$.

$\rightsquigarrow$ "Bijna" een paradoxale partitie. Een echte paradoxale partitie (in 4 stukken) bestaat ook.

Het bewijs van de stelling van Banach en Tarski

- Bekijk de massieve bol B met straal 1 in $\mathbb{R}^3$.
- Bekijk de actie van de groep van rotaties op B.
- Twee random gekozen rotaties a en b zullen de vrije groep $\mathbb{F}_2$ voortbrengen als deelgroep van de groep van rotaties.
- De actie van de groep van rotaties op de bol B is niet vrij : elke rotatie fixeert de as van rotatie.
- Elke rotatie in $\mathbb{F}_2$ heeft zo'n as van rotatie: we verwijderen dit aftelbaar aantal assen van rotatie uit B.
- De groep $\mathbb{F}_2$ werkt vrij op wat overblijft.
  $\rightsquigarrow$ De paradoxale partitie van $\mathbb{F}_2$ levert dan een paradoxale partitie van "de bol zonder dat aftelbaar aantal assen".

$\rightsquigarrow$ Om ook dat aftelbaar aantal assen aan te pakken heb je een veel technischer bewijs nodig.

Een opmerking over het keuze-axioma

De cruciale zin op één van de vorige slides was

Kies in elke baan precies één punt...

- Het keuze-axioma zegt dat zoiets kan.
  Je kan in elke deelverzameling van een partitie van X een element kiezen en zo een deelverzameling $Y \subset X$ vormen die uit elke deelverzameling van de partitie precies één element bevat.

- Axiomatisering van de verzamelingenleer door Zermelo en Fraenkel.

- De status van het keuze-axioma was (en is af en toe nog) omstreden. De stelling van Banach en Tarski werd soms beschouwd als een argument tegen het keuze-axioma.

- Het keuze-axioma is nodig om, bijvoorbeeld, te bewijzen dat elke vectorruimte een basis heeft.

Stefan Banach en Alfred Tarksi aan het woord

La démonstration des théorèmes précédents s'appuie sur les résultats de MM. Hausdorff, Vitali et Banach[1]), qui concernent le probléme général de mesure; elle fait donc usage de *l'axiome du choix* de M. Zermelo. Le rôle que joue cet axiome dans nos raisonnements nous semble mériter l'attention.

Envisageons, en effet, les deux théorèmes suivants, qui résultent de nos recherches:

I. Deux polyèdres arbitraires sont équivalents par décomposition finie.

II.[1]) Deux polygones différents, dont l'un est contenu dans l'autre, ne sont jamais équivalents par décomposition finie.

Or, on ne sait démontrer aucun de ces deux théorèmes sans faire appel à l'axiome du choix: ni le premier, qui semble peut-être paradoxal, ni le second, qui est en plein accord avec l'intuition. De plus, en analysant leurs démonstrations, on peut constater que l'axiome du choix intervient dans la démonstration du premier théorème sous une forme bien plus restreinte que dans le cas du second.

Amenable groepen

Definitie (John von Neumann, 1929)

We noemen een groep Γ amenable als we aan elke deelverzameling $A \subset \Gamma$ een getal $m(A) \in [0, 1]$ kunnen toekennen zodanig dat

- $m(\emptyset) = 0$ en $m(\Gamma) = 1$.
- $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ als A en B disjunct zijn.
- $m(gA) = m(A)$ voor alle $g \in \Gamma$ en $A \subset \Gamma$.

$\rightsquigarrow$ Een amenable groep heeft geen paradoxale partitie in deelverzamelingen $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_n$ met

$$\Gamma = g_1\Gamma_1 \sqcup \cdots \sqcup g_k\Gamma_k \quad \text{en} \quad \Gamma = g_{k+1}\Gamma_{k+1} \sqcup \cdots \sqcup g_n\Gamma_n$$

omdat dit leidt tot $1 = m(\Gamma) = 2m(\Gamma) = 2$.

$\rightsquigarrow$ De vrije groep $\mathbb{F}_2$ is dus niet amenable.

Stelling van Tarski. Als een groep niet amenable is, dan heeft ze een paradoxale partitie!

Een heleboel amenable groepen

- Alle commutatieve groepen (dit wil zeggen $gh = hg$ voor alle $g, h \in \Gamma$) zijn amenable. In het bijzonder is $(\mathbb{Z}, +)$ amenable.
- De groep van isometrieën van $\mathbb{R}$ en de groep van isometrieën van $\mathbb{R}^2$ zijn amenable : daarom is er geen stelling van Banach en Tarski in dimensies 1 en 2.
- Alle oplosbare groepen zijn amenable (voor wie weet wat dit wil zeggen; Galois en oplosbaarheid van n-de graadsvergelijkingen). In het bijzonder is de groep van inverteerbare bovendriehoeksmatrices amenable.
- De groep van alle inverteerbare $n \times n$ matrices is dan weer niet amenable voor $n \geq 2$.

Eigenschappen van (niet) amenable groepen

- Als Γ amenable is, dan zijn alle deelgroepen van Γ ook amenable.
- Als Γ amenable is, dan zijn ook alle quotiënten van Γ amenable.
- Omgekeerd: als Γ een groep is en $N \lhd \Gamma$ een normale deelgroep, dan is Γ amenable als en slechts als zowel N als Γ/N amenable zijn.

Gevolg: als Γ de groep $\mathbb{F}_2$ als deelgroep heeft, dan is Γ niet amenable.

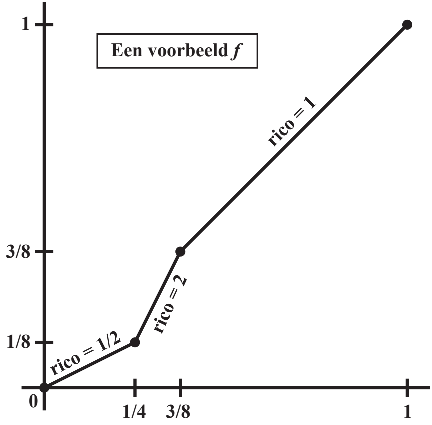
Probleem van von Neumann: geldt het omgekeerde?

Alternatief van Tits (1972): ja, voor groepen van inverteerbare matrices.

Ol'shanskii (1980): neen. Er zijn groepen die niet amenable zijn en evenmin $\mathbb{F}_2$ bevatten.

Een open probleem: de groep van Thompson

We bekijken bijecties $f : [0,1] \to [0,1]$ van een heel speciale vorm.

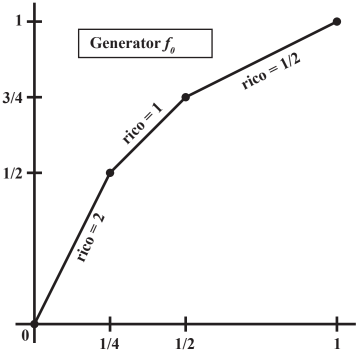


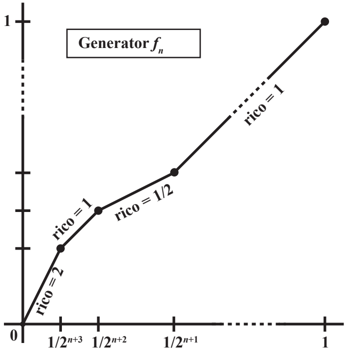
- Stuksgewijs lineair.
- "Breekpunten" in $k/2^n$.
- Rico's 2^n, $n \in \mathbb{Z}$.

$\rightsquigarrow$ Al deze f samen vormen een groep : de groep F van Thompson.

Voortbrengers voor de groep van Thompson

De volgende bijecties $f_n : [0,1] \to [0,1]$ brengen de groep F voort.





- Elk element van F kan geschreven worden als een samenstelling van de f_n en f_n^{-1}.
- Enige relaties tussen deze voortbrengers f_n zijn $f_k^{-1} \circ f_n \circ f_k = f_{n+1}$ voor alle $k < n$.

Is de groep F van Thompson amenable?

- De groep F bevat geen deelgroep die isomorf is met $\mathbb{F}_2$.
- De groep F is niet "elementair amenable".
- Akhmedov beweert sinds februari 2009 in steeds gecorrigeerde versies van een artikel dat F niet amenable is.
- Shavgulidze beweert sinds mei 2009 dat F wel amenable is.

$\leadsto$ Intense activiteit op blogs, seminaries, enz.
Voornaamste conclusie: de amenability van de groep F van Thompson blijft een reusachtig open probleem.