PUMAthematics

26 februari 2018

Wedstrijdreglement

(a) De competitie bevat zes vragen, die elk op evenveel punten staan. Je krijgt 210 minuten de tijd om zo veel mogelijk vragen op te lossen.

(b) Handboeken, rekenmachines, gsm's en andere hulpmiddelen zijn hierbij niet toegestaan. Enkel pen en papier mogen gebruikt worden.

(c) Vermeld op ieder ingediend blad duidelijk je naam en het volgnummer van de vraag, en op minstens één blad ook je jaar en richting. Werk op elk blad maar aan één vraag.

(d) Bij verdere vragen of betwistingen is uitsluitend de jury bevoegd.

(e) Door deel te nemen aan de PUMA 2018 verklaart men zich akkoord met dit reglement.

(f) Er werd getracht de zes vragen te ordenen naar stijgende moeilijkheidsgraad. Deze ordening is echter louter subjectief, laat je dus zeker niet ontmoedigen door het rangnummer van een vraag.

(g) Veel plezier en veel succes!

De oplossingen zullen na de wedstrijd verschijnen op onze website: http://prime.ugent.be. De proclamatie van deze wedstrijd gaat door op donderdag 15 maart 2018 om 13.00h in gebouw S25, auditorium Emmy Noether. Beschouw dit gerust als een uitnodiging. Zoals vorig jaar combineren we de proclamatie met een pizzafestijn. Wil je een pizza bestellen, dan kan je dat op voorhand op onze website ingeven. Verdere informatie verschijnt tijdig op onze website.

Vragen

1 It's a plot!

Het programma PlotPar neemt als input twee reële veeltermen $p(x), q(x)$ en plot vervolgens (tot op oneindige nauwkeurigheid) de verzameling $\{(p(t), q(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ in het vlak $\mathbb{R}^2$. Het programma PlotZer neemt als input een reële veelterm $r(x, y)$ in twee variabelen en plot vervolgens (tot op oneindige nauwkeurigheid) de verzameling $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r(x, y) = 0\}$ in het vlak $\mathbb{R}^2$.
Bewijs dat er voor elk programma $p \in \{\text{PlotPar}, \text{PlotZer}\}$ een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ bestaat die wel door het programma p, maar niet (i.e. voor geen enkele geldige input) geplot kan worden door het programma bevat in $\{\text{PlotPar}, \text{PlotZer}\} \setminus \{p\}$.

2 Een machtig jaar

Zij k een natuurlijk getal met $1 \leqslant k < 2018$.
Bewijs dat er twee natuurlijke getallen n_1, n_2 bestaan met $1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant 2018$ zo dat $2018^{n_1} + 2018^{n_1+1} + \cdots + 2018^{n_2}$ deelbaar is door k.

3 Afleidingsmanoeuvre

De verzameling V bestaat uit alle continue functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvoor

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x)f(x+h) - f(x)^2}{h} = 0,$$

voor elke $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bewijs: als $f \in V$ afleidbaar is (op heel $\mathbb{R}$), dan is f ook constant (op heel $\mathbb{R}$).
(4 punten)

(b) Bevat V ook niet-constante functies?
(6 punten)

4 $\mathbf{Pu^+ + Ma^-}$

Zij $\mathbb{C}^{n\times n}$ de verzameling complexe $n \times n$-matrices ($n \geqslant 1$).
We noemen $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *involutief* precies wanneer $U^2 = I$.
We noemen $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *onvolutief* precies wanneer de verzameling $\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : AU + U^T A = 0\}$ enkel de nulmatrix bevat.
We noemen $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *ionvolutief* precies wanneer U zowel involutief als onvolutief is.

(a) Bewijs dat elke *ionvolutieve* matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ symmetrisch is.
(2 punten)

(b) Bepaal nu alle *ionvolutieve* matrices $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
(8 punten)

5 En garde!

8 musketiers ontmoeten elkaar op een feestje en hebben zin om te schermen. Zij vragen zich af of zij een aantal duels (één tegen één) kunnen uitvechten zo dat na afloop de volgende twee uitspraken waarheid worden.

- Voor elke twee musketiers x, y bestaat er een musketier u die zowel met x als met y geschermd heeft op het feestje.
- Voor elke twee musketiers x, y bestaat er een musketier u (mogelijk gelijk aan x of y) die op het feestje niet met x en ook niet met y geschermd heeft.

Is dit mogelijk?

Het is hierbij van belang dat we een musketier steeds als niet *geschermd met* zichzelf beschouwen. We zien *geschermd met* dus als een irreflexieve, symmetrische, niet-noodzakelijk transitieve relatie.

6 PUMA-priemen

Zij $p > 3$ een priemgetal. Met een koppel natuurlijke getallen $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ associëren we als volgt een rij $X(n, m) = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ natuurlijke getallen:

$$x_0 = n, \quad x_{2l+1} = n^p x_{2l}, \quad x_{2l+2} = n^{m(p-2)} x_{2l+1}^m, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots.$$

Een rij $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ noemen we p-nomenaal als geldt:

$$\forall i, j \in \mathbb{N} : p | x_i - x_j \iff p - 3 | i - j.$$

We noemen het priemgetal p een PUMA-priem indien er een koppel $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ bestaat waarvoor de geassocieerde rij $X(n, m)$ p-nomenaal is.
Hoeveel PUMA-priemen zijn er bevat in het interval $[4, 200]$?