Inleiding tot de Problem Solving - deel 1: Combinatoriek en getaltheorie

Jan Vonk

1 oktober 2008

1 Combinatoriek

Inleiding

Een gebied dat vandaag de dag haast niet onderschat kan worden binnen de wiskunde is de zogenaamde combinatoriek. Een degelijke kennis van en vaardigheid met de basisprincipes is haast onontbeerlijk voor elke student, maar een gedreven problem-solver zal in combinatoriek naast een noodzakelijk onderdeel van de wiskunde ook een schitterende wereld van problemen en toepassingen vinden die zich onder meer onderscheiden door uitzonderlijke elegantie en schoonheid.

De basisprincipes die we in deze tekst zullen ontmoeten steken geregeld de kop op in een heel brede waaier van problemen, soms met zeer verassende toepassingen. Opnieuw is de enige manier om vlot met deze principes te leren werken het oplossen van problemen.

Invarianten

Problemen die met deze techniek op te lossen zijn, zijn vaak goed herkenbaar. Wanneer in een probleem een bepaald algoritme wordt uitgevoerd, is het vaak een goede strategie om op zoek te gaan naar invarianten, dingen die niet veranderen gedurende de verschillende stappen van het algoritme. Als er met andere woorden herhaling is van een bepaalde stap, zoek dan steeds naar een invariant. Eens een invariant gevonden werd, kan men antwoorden op vragen als "Kan een gegeven eindtoestand bereikt worden?" of "Zoek alle mogelijke eindtoestanden".

Voorbeeld Op een schoolbord schrijven we de getallen 1 tot en met 99. Je kiest telkens twee getallen, en vervangt ze door hun verschil. Bewijs dat het overblijvende getal even is.

Bewijs Bij elke stap zijn er 3 mogelijkheden:

- We kiezen twee even getallen: ze worden vervangen door een even getal.
- We kiezen een even en een oneven getal: ze worden vervangen door een oneven getal.
- We kiezen twee oneven getallen: ze worden vervangen door een even getal.

Merk op dat het aantal oneven getallen telkens ofwel constant blijft, ofwel met 2 vermindert. De pariteit van het aantal oneven getallen op het bord is dus een invariant en is dus na elke stap hetzelfde gebleven. Aangezien dat aantal in het begin even is, moet dat ook zo zijn in de eindtoestand. Het laatste getal kan met andere woorden geen oneven getal zijn, hetgeen we wilden bewijzen. □

Problemen

1. Begin met de verzameling $\mathcal{S} = \{3, 4, 12\}$. Een stap bestaat uit het kiezen van 2 getallen a en b uit $\mathcal{S}$ en het vervangen van a en b door $\frac{3a}{5} - \frac{4b}{5}$ en $\frac{4a}{5} + \frac{3a}{5}$. Kan je ooit de toestand $\mathcal{S} = \{4, 6, 12\}$ bereiken?

2. Men schrijft het getal -1 bij een van de hoekpunten van een kubus, en bij alle andere hoekpunten schrijft men 1. kies telkens een ribbe van de kubus en verhoog of verlaag de getallen bij de 2 aanliggende hoekpunten met 1. Kan je de toestand bereiken waarin het getal 1 bij elk hoekpunt staat?

3. Elke term in de rij $1, 0, 1, 0, 1, 0, ...$ vanaf de zevende term is de som van de vorige zes modulo 10. Bewijs dat het patroon $..., 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...$ nooit voorkomt.

Kleuringen

Soms kan het nuttig zijn om gebruik te maken van kleuringen om de onmogelijkheid van een bepaalde handeling te bewijzen. Een eenvoudig voorbeeld is het volgende:

Men beschikt over een schaakbord met 64 vakjes, waaruit we de twee vakjes van twee diametraal tegengestelde hoeken uitzagen. Op hoeveel manieren kan je dit bijgezaagde schaakbord bedekken met 31 dominosteentjes?

Enkele moedige pogingen zouden nergens op uitdraaien, want het blijkt onmogelijk te zijn zo'n schaakbord met 31 dominosteentjes te bedekken. Immers, elk dominosteentje bedekt 1 zwart en 1 wit vakje, terwijl het bijgezaagde schaakbord 30 vakjes van een kleur heeft, en 32 vakjes van de andere kleur.

Problemen

1. Een vierkant van 7×7 is bedekt met 16 tegeltjes met afmeting 3×1 en een enkel 1×1 tegeltje. Wat zijn de mogelijke posities van dat ene tegeltje?

Het extremaalprincipe

Het duivenhokprincipe

Dit principe, dat zo eenvoudig lijkt en toch verassend diepe toepassingen kan hebben, behoeft misschien geen introductie aangezien het in vele cursussen aan bod komt. De formulering ervan zal door vrijwel iedereen als voor de hand liggend gezien worden, en toch is het een krachtig hulpmiddel in vele problemen.

Men zou het duivenhokprincipe als volgt kunnen verwoorden:
Zijn n en k natuurlijke getallen. Als men n duiven verdeelt over k hokken, dan bestaat er een hok waarin minstens $\left[\frac{n-1}{k}\right]+1$ *duiven zitten.*

De kracht van dit eenvoudige principe blijkt uit de vele toepassingen, in combinatoriek, maar ook in algebra, getaltheorie en zelfs meetkunde. We illustreren het gebruik van deze techniek met enkele voorbeelden:

Voorbeeld Bewijs dat elke deelverzameling met 55 elementen van $\mathcal{S} = \{1, 2, ..., 100\}$ twee getallen bevat waarvan het (positieve) verschil gelijk is aan 9.

Bewijs Neem een deelverzameling $\mathcal{A}$ met $|\mathcal{A}| = 55$ en noem $a_1 < a_2 < ... < a_{55}$ de elementen van $\mathcal{A}$. We definiren vervolgens $b_i := a_i + 9$. Er geldt uiteraard dat $a_i \leq 100$, dus er volgt dat $b_i \leq 109$. We hebben nu 55 a_i's en 55 b_i's, wat een totaal maakt van 110 getallen, allen niet groter dan 109. Hieruit volgt wegens het duivenhokprincipe dat er twee gelijk moeten zijn. $\square$

Sommige toepassingen zijn subtieler

Enkele klassiekers

1. Een schaakmeester heeft 77 dagen om zich voor te bereiden op een toernooi. Hij wil minstens 1 spel per dag spelen, maar niet meer dan 132 spelletjes. Bewijs dat er een opeenvolging van dagen is waarin hij exact 21 spelletjes speelt.

2. Zijn $a_1, a_2, ..., a_n$ niet noodzakelijk verschillende natuurlijke getallen. Bewijs dat er een deelverzameling bestaat van deze getallen met een som deelbaar door n.

3. Zij $\mathcal{R}$ een deelverzameling van $\mathcal{S} = \{1, 2, ..., 2n\}$ zodat $|\mathcal{R}| = n + 1$. Bewijs dat $\mathcal{R}$ twee elementen a en b bevat zodat a een deler is van b.

4. Bewijs dat er voor elke n een Fibonacci-getal is dat eindigt op n nullen.

Opwarmers

1. Bewijs dat elk veelvlak twee zijvlakken heeft die begrensd worden door een gelijk aantal zijden.

2. Kies 20 natuurlijke getallen kleiner dan 70. Bewijs dat er onder de paarsgewijze verschillen minstens 4 dezelfde getallen zijn.

3. Bewijs dat voor een gegeven n die geen veelvoud is van 2 of 5, er een veelvoud van n bestaat dat enkel uit 1'tjes bestaat in decimale voorstelling.

4. Bewijs dat er een getal N van de vorm 20042004...2004 bestaat zodat

- N deelbaar is door 2003.
- N niet meer dan 10000 cijfers heeft in decimale voorstelling.

5. De hoekpunten van een regelmatige 7-hoek worden ofwel in zwart ofwel in wit gekleurd. Bewijs dat er drie punten met dezelfde kleur bestaan die een gelijkbenige driehoek vormen.

Uitdagingen

1. Gegeven is een rechthoekig rooster van punten met 13 rijen en 13 kolommen. Men kleurt 53 van de 169 punten rood. Bewijs dat er een rechthoek bestaat waarvan de zijden evenwijdig zijn aan de randen van het rooster en waarvan alle hoekpunten rode roosterpunten zijn.

2. Zij n een oneven natuurlijk getal groter dan 1 en zijn $c_1, c_2, ..., c_n$ natuurlijke getallen. Voor elke permutatie $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ van $\{1, 2, ..., n\}$ definieert men $S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$. Bewijs dat er twee permutaties $a \neq b$ bestaan zodat $n!$ een deler is van $S(a) - S(b)$.

3. Zij $\mathcal{A}$ een deelverzameling van $\mathcal{S} = \{1, 2, ..., 1000000\}$ met 101 elementen. Bewijs dat er getallen $t_1, t_2, ..., t_n$ bestaan in $\mathcal{S}$ zodat de verzamelingen

$$\mathcal{A}_j = \{x + t_j | x \in \mathcal{A}\}$$

twee aan twee disjunct zijn.

4. Aan een wiskundecompetitie nemen 21 jongens en 21 meisjes deel. Achteraf bleek dat

   - elke deelnemer hoogstens 6 problemen oploste.
   - voor elk paar bestaande uit een jongen en een meisje, er minstens 1 probleem is dat door allebei werd opgelost.

   Bewijs dat er een probleem bestaat dat opgelost werd door minstens 3 jongens en minstens 3 meisjes.

2 Getaltheorie

Inleiding

Getaltheorie komt helaas de laatste jaren nauwelijks nog aan bod in het secundair onderwijs, maar het is desondanks nog een heel populair onderwerp in talrijke competities. Vaardigheid met getaltheoretische problemen is dus ook onontbeerlijk voor elke zichzelf respecterende problemsolver.

Bij vele takken in de wiskunde is het zo, maar voor getaltheorie in het bijzonder: Je kan het enkel leren door massaal problemen op te lossen. De theorie zal minder aandacht krijgen in deze tekst, aangezien die bijvoorbeeld in het vak *Relaties en Structuren* reeds uitvoerig aan bod kwam.

Fundamentele stellingen

Stelling (Bezout-Bachet)
Bij gegeven gehele getallen a en b bestaan er gehele getallen x en y zodat $ax + by = ggd(a, b)$. Meer nog, als x en y variren bekomen we met $xa + by$ enkel veelvouden van $ggd(a, b)$.

Stelling (Chinese reststelling)
Als $a_1, a_2, ..., a_k$ en $n_1, n_2, ..., n_k$ twee verzamelingen van onderling ondeelbare gehele getallen zijn, dan heeft het stelsel van vergelijkingen

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{n_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_k \pmod{n_k} \end{cases}$$

een unieke oplossing modulo $n_1 n_2 ... n_k$.

Stelling (Dirichlet)
Als a en b onderling ondeelbaar zijn, dan bevat de rij $(an + b)_{n \in \mathbb{N}}$ oneindig veel priemgetallen.

Stelling (Inverteerbaarheid)
Het invers element (voor de vermenigvuldiging) van a modulo n bestaat als en slechts als $ggd(a, n) = 1$.

Defintitie (Orde van een element)
In een groep noemen we de orde van een element z, het kleinste aantal keer dat je het element met zichzelf met samenstellen om het eenheidselement uit te komen. Als zoń getal niet bestaat, zeggen we dat de orde van dat element oneindig is. We noteren $ord(z)$.

Stelling (Lagrange) De orde van een element is een deler van het aantal elementen in een eindige groep.

Stelling (Kleine stelling van Fermat)
Zij a een natuurlijk getal en p een priemgetal, dan

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Definitie We stellen $\phi(n)$ het aantal natuurlijke getallen kleiner dan n die copriem zijn met n. We noemen ϕ de Euler totiënt functie.

Stelling (Stelling van Euler)
Zij a en n natuurlijke getallen met $ggd(a, n) = 1$, dan

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Stelling (Wilson)
p is een priemgetal als en slechts als $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Definitie Als de orde van een element g in $\mathbb{Z}_n, .$ gelijk is aan $\phi(n)$ dan noemen we g een primitieve wortel modulo n.

Stelling (Bestaan van primitieve wortel)
Er bestaat enkel een primitieve wortel modulo n als n gelijk is aan $2, 4, p^k$ of $2p^k$ met p een oneven priemgetal.

Problemen

Enkele klassiekers

1. Bewijs dat $n! + 1$ en $(n + 1)! + 1$ onderling ondeelbaar zijn voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.
2. Toon aan dat $ggd(a^m - 1, a^n - 1) = a^{ggd(m,n)} - 1$.
3. Zij p priem met $p|(x^2 + 1)$. Toon aan dat $p = 2$ of $p \equiv 1 \pmod 4$.
4. Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen van de vorm $4k + 1$ bestaan.
5. Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen van de vorm $4k + 3$ bestaan.
6. Bewijs dat n nooit een deler is van $2^n - 1$.

Opwarmers

1. Zij a en b oneven natuurlijke getallen. Bewijs dat $a^2 + b^2$ geen volkomen kwadraat is.
2. Als n samengesteld is, is $2^n - 1$ dat ook. Als n een oneven deler heeft, is $2^n + 1$ ook samengesteld.
3. Vind alle oplossingen in natuurlijke getallen van $1 + 3^x = 2^y$.
4. Vind alle natuurlijke getallen m, n met n oneven zodat $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12}$.
5. Als 2n+1 en 3n+1 kwadraten zijn, dan is 5n+3 samengesteld.
6. Als p en $p^2 + 2$ priem zijn, dan is ook $p^3 + 2$ priem.
7. Zij $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1 = 0$ met $a_i \in \{-1, 1\}$. Bewijs dat $4|n$.
8. x en y zijn natuurlijke getallen zodat $3x+4y$ en $4x+3y$ volkomen kwadraten zijn. Bewijs dat 7 zowel x als y deelt.
9. Vind alle x, y natuurlijke getallen zonder priemfactoren groter dan 5 die voldoen aan $x^2 - y^2 = 2^k$ voor een zeker natuurlijk getal k.

Uitdagingen

1. Vind alle natuurlijke getallen die de som zijn van de kwadraten van hun vier kleinste positieve delers.
2. Zij p priem en n een natuurlijk getal. Neem een deler q van $(n+1)^p - n^p$. Bewijs dat $q-1$ deelbaar is door p.
3. Wat is het kleinste natuurlijke getal n zodat er gehele getallen $x_1, x_2, ..., x_n$ bestaan waarvoor $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 2002^{2002}$?
4. Beschouw de rij $a_1, a_2, ...$ gedefinieerd daar $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ $(n \geq 1)$. Zoek alle positieve getallen die onderling ondeelbaar zijn met alle getallen uit de rij.
5. Zoek alle paren van natuurlijke getallen (n, p) zodat p priem is en $(p-1)^n - 1$ deelbaar is door n^{p-1}.
6. Toon aan dat voor elk priemgetal p er een priemgetal q bestaat zodat $n^p - p$ niet deelbaar is door q voor alle $n \in \mathbb{N}$.