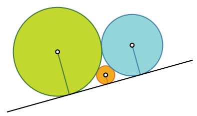
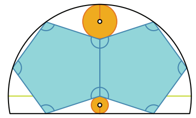
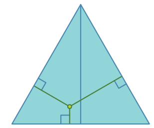
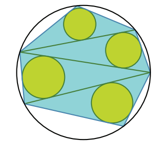
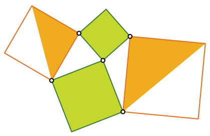
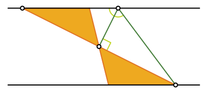
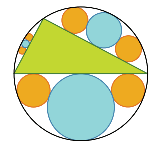
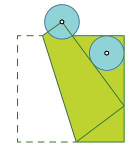
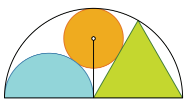
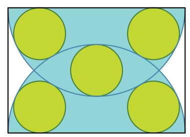
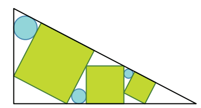
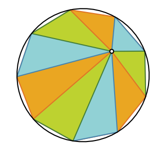
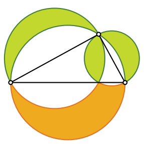
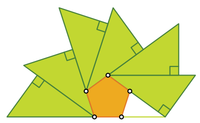
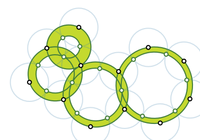
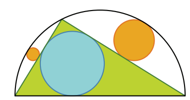
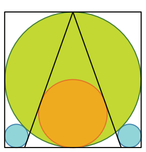
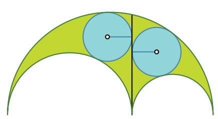
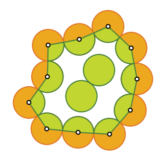
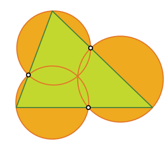
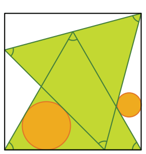
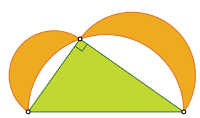
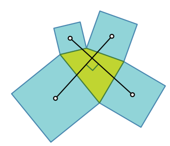
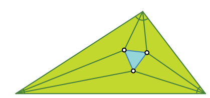
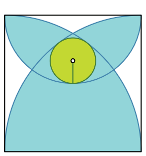
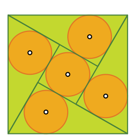
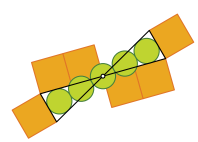
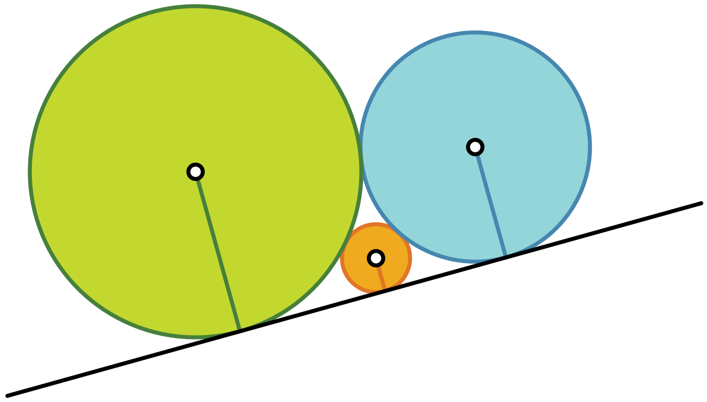
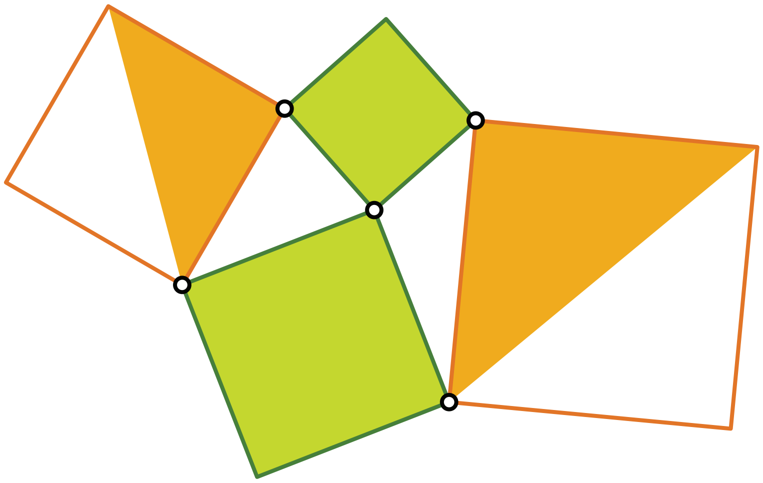
Overzicht Sangaku's

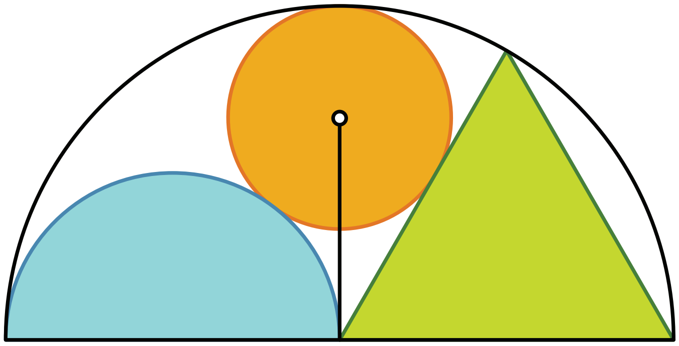
 Fordcirkels 1 ★★★☆	 Pentapuzzel 8 ★★★★	 Stelling van Viviani 15 ★☆☆☆	 Japanse cirkelstelling 22 ★★★★
 Pythagoras revisited 2 ★★☆☆	 Hoekenjagen 9 ★★☆☆	 Circleception 16 ★★★★	 Origami 23 ★★★☆
 Zonsopgang 3 ★★★☆	 Vijfde wiel aan de wagen 10 ★★★★	 Kaas met gaten 17 ★☆☆☆	 Carroussel 24 ★★☆☆
 Cirkelzaag 4 ★☆☆☆	 Gulden molentje 11 ★★★☆	 One rule to Ring them all 18 ★☆☆☆	 Hobbit hole 25 ★★★☆
 Pac-man 5 ★★★★	 Tweelingcirkels van Archimedes 12 ★★☆☆	 Kettingreactie 19 ★☆☆☆	 Stelling van Miquel 26 ★★☆☆
 Tango Triángulo 6 ★★★★	 Maantjes van Hippocrates 13 ★☆☆☆	 Stelling van Van Aubel 20 ★★☆☆	 Morleys mirakel 27 ★★★★
 Cirkelredeneringen 7 ★★★☆	 Vicieuze cirkels 14 ★★☆☆	 Duivelse diabolo 21 ★★★☆	★☆☆☆ ⇒ makkelijke oplossing ★★☆☆ ⇒ makkelijke opgave ★★★☆ ⇒ moeilijke oplossing ★★★★ ⇒ moeilijke opgave



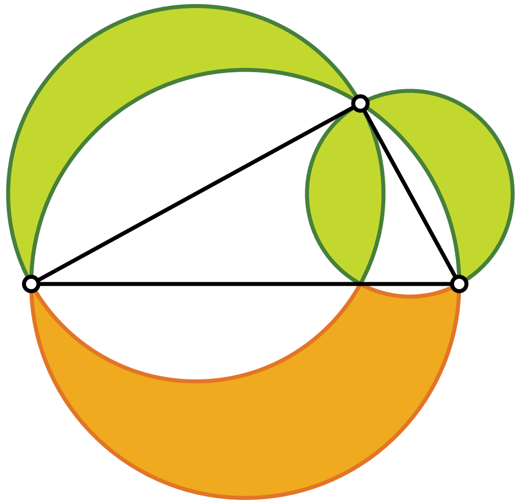
★★★☆ Fordcirkels ①



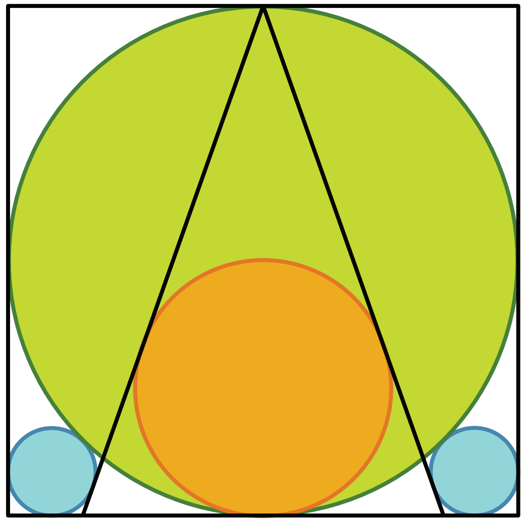
★★☆☆ Pythagoras revisited ②



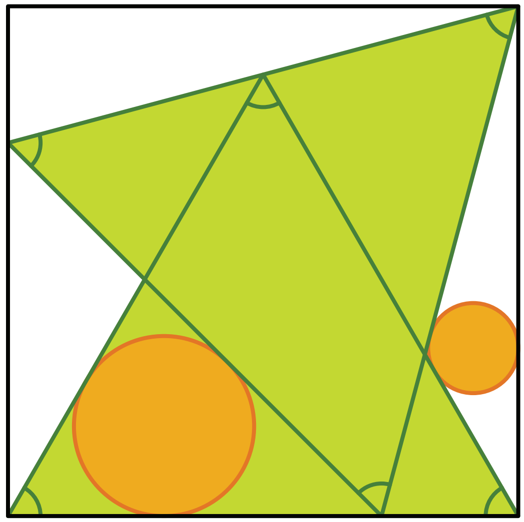
★★★☆ Zonsopgang ③



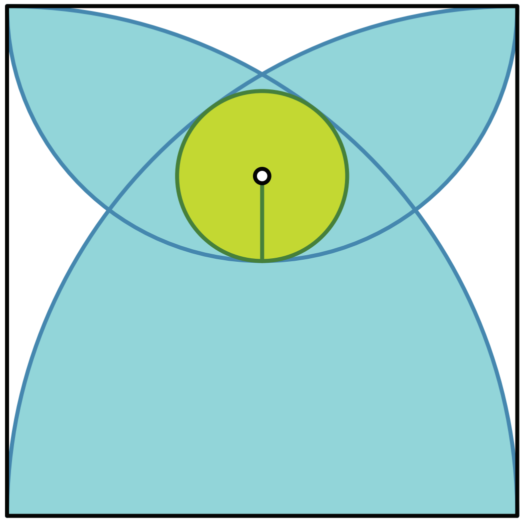
★☆☆☆ Cirkelzaag ④



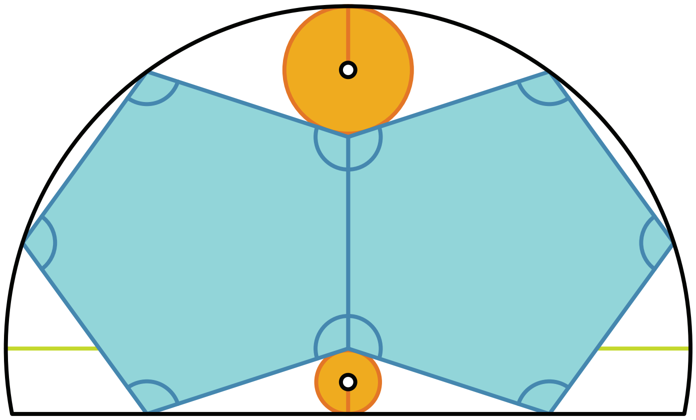
★★★★ Pac-man ⑤



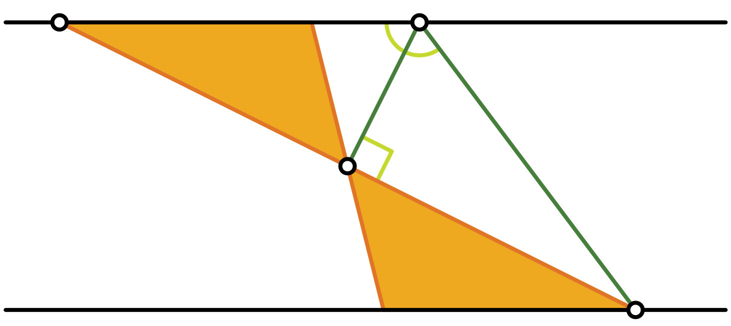
★★★★ Tango Triángulo ⑥



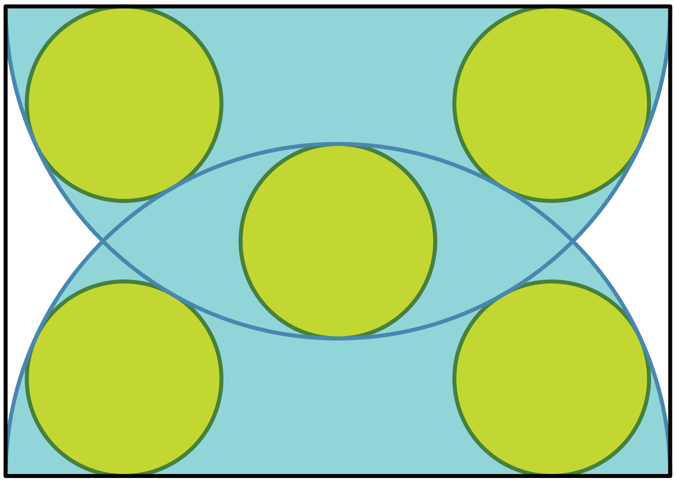
★★★☆ Cirkelredeneringen (7)



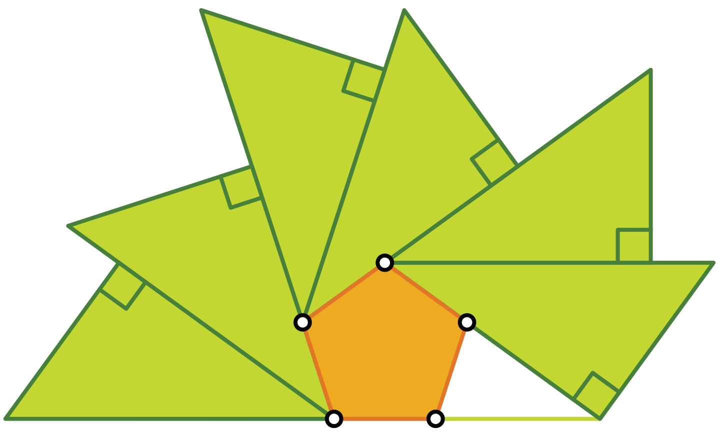
★★★★ Pentapuzzel (8)



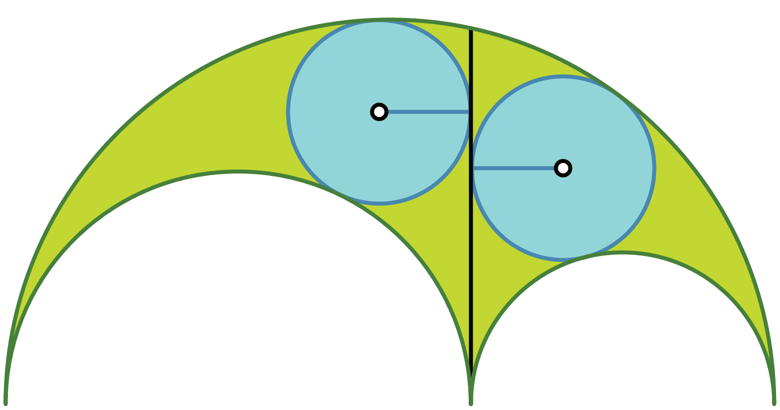
★★☆☆ Hoekenjagen (9)



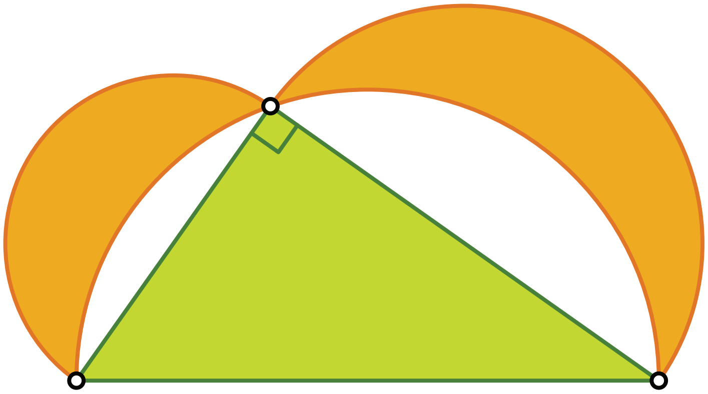
★★★★ Vijfde wiel aan de wagen 10



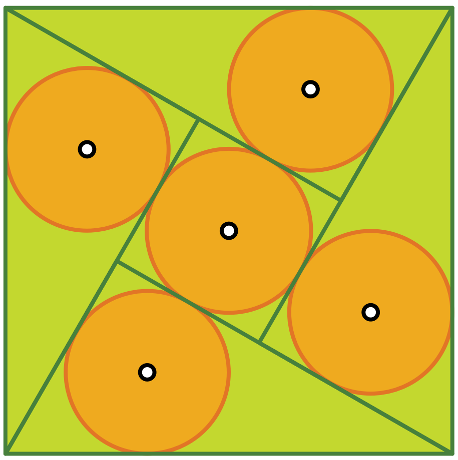
★★★☆ Gulden molentje 11



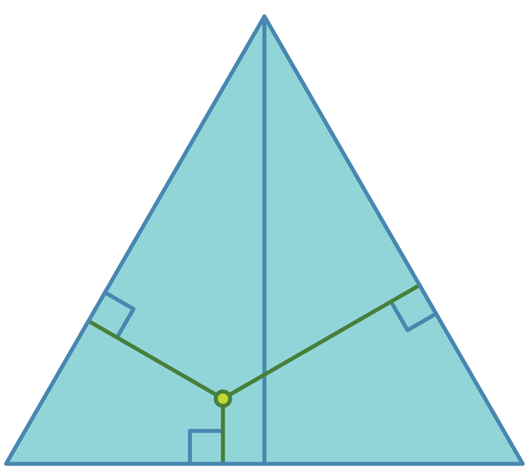
★★☆☆ Tweelingcirkels van Archimedes 12



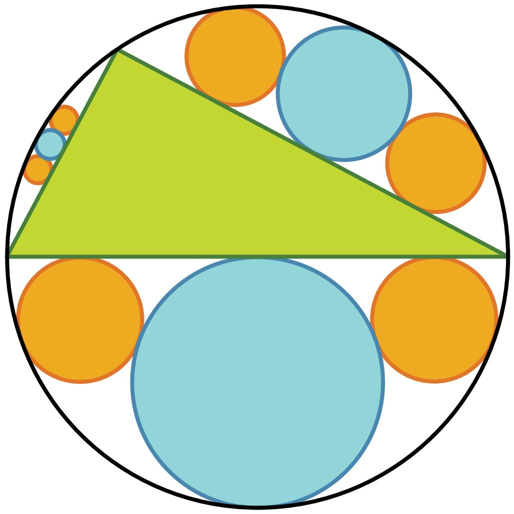
★☆☆☆ Maantjes van Hippocrates 13



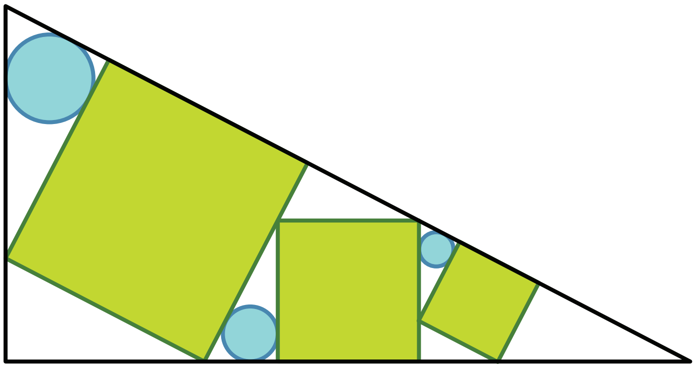
★★☆☆ Vicieuze cirkels 14



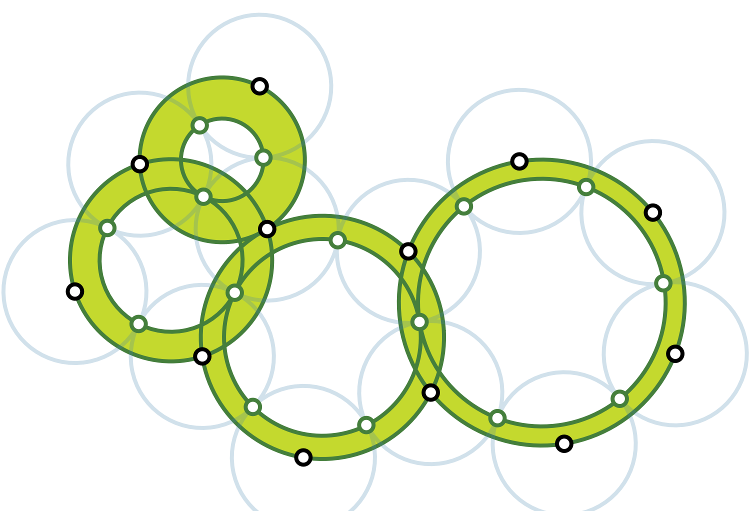
★☆☆☆ Stelling van Viviani 15



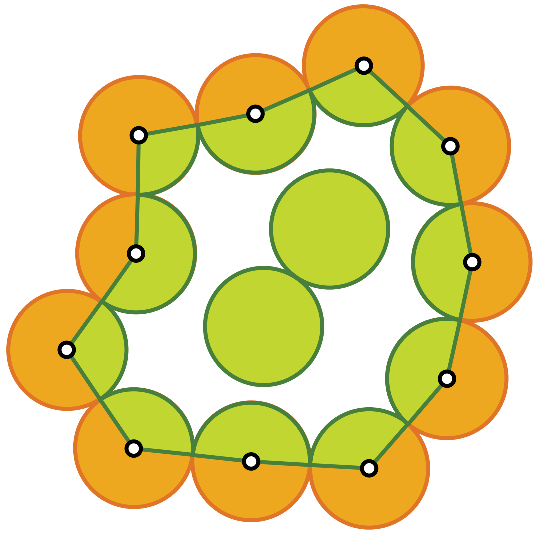
★★★★ Circleception



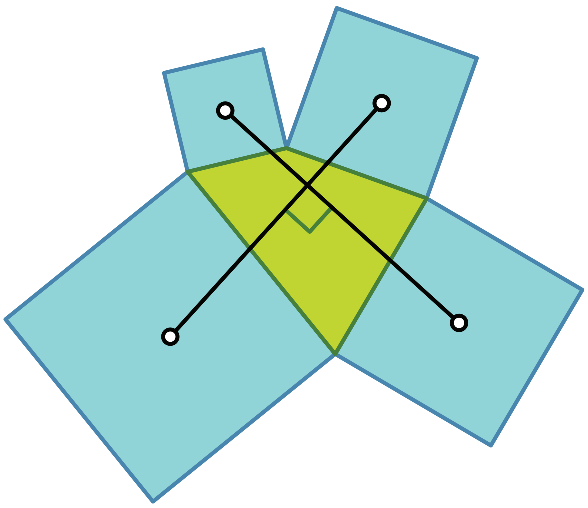
★☆☆☆ Kaas met gaten



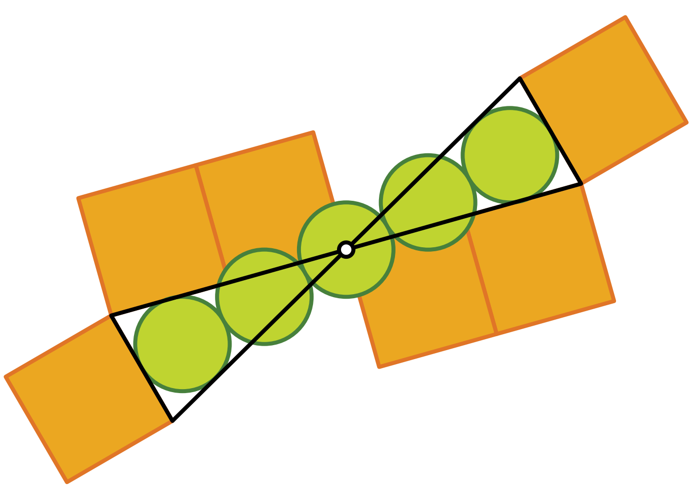
★☆☆☆ One rule to Ring them all



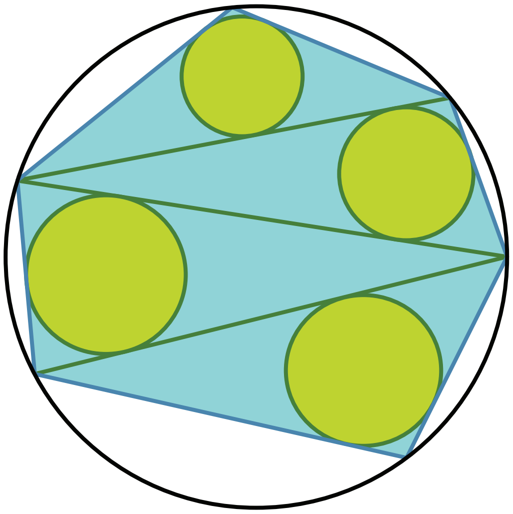
★☆☆☆ Kettingreactie 19



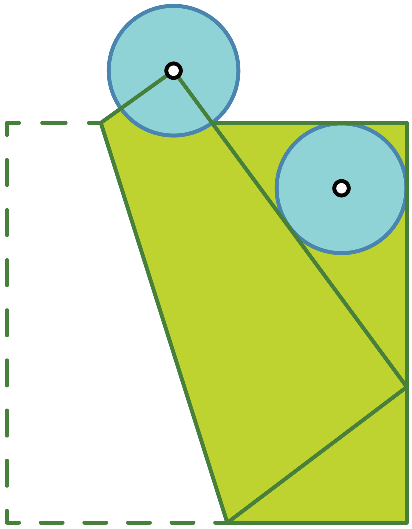
★★☆☆ Stelling van Van Aubel 20



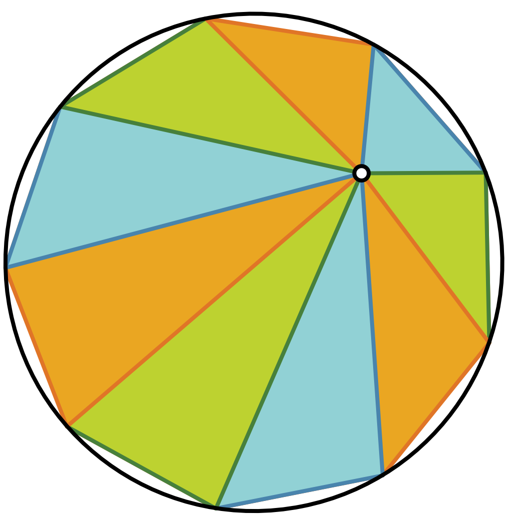
★★★☆ Duivelse diabolo 21



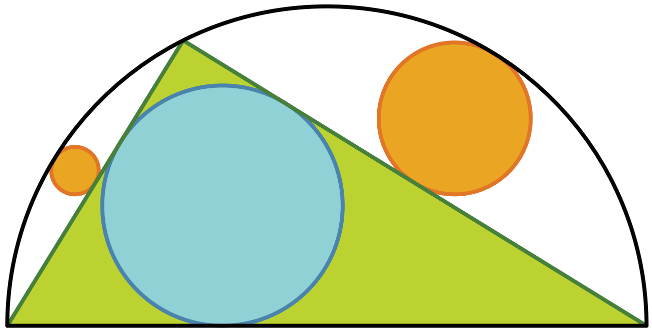
★★★★ Japanse cirkelstelling 22



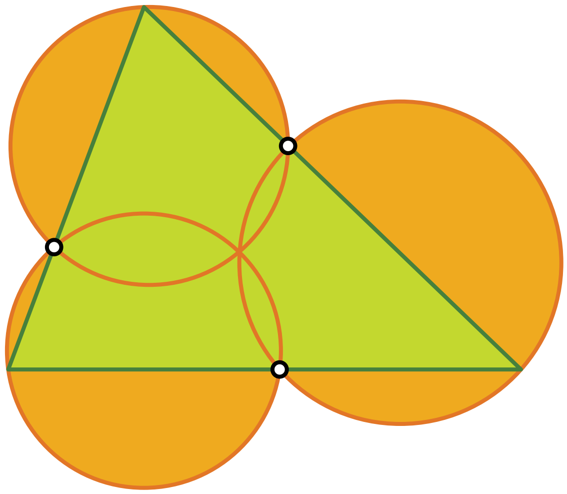
★★★☆ Origami 23



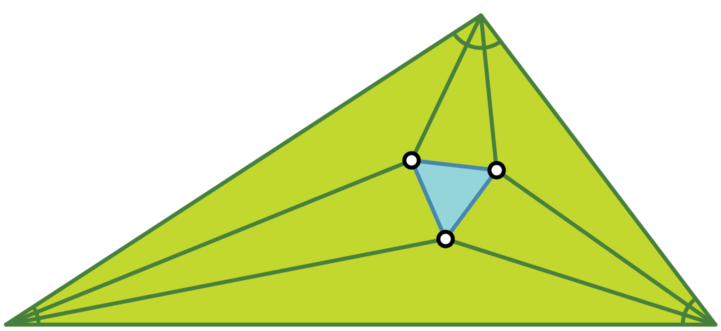
★★☆☆ Carrousel 24



★★★☆ Hobbit hole 25



★★☆☆ Stelling van Miquel 26



★★★★ Morleys mirakel 27

① Opgave

Beschouw drie onderling rakende cirkels met een gemeenschappelijke raaklijn.
Zoek het verband tussen de stralen van deze cirkels.

① Hint

Bewijs eerst een lemma: gegeven twee cirkels rakend aan elkaar en aan een gemeenschappelijke rechte in respectievelijk E en F, zoek dan een verband tussen hun stralen en $|EF|$. Pas dan toe op drie cirkels.

① Oplossing

Noem de stralen van de grote cirkels R_1 en R_2, en die van de kleine r. Dan geldt:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$$

② Opgave

Construeer twee vierkanten met een gemeenschappelijk hoekpunt,
en bouw er twee nieuwe vierkanten op zoals op de figuur.
Bewijs dat de oppervlakte van de eerste twee vierkanten samen
even groot is als de helft van die van de twee nieuwe vierkanten.

② Hint

Gebruik de cosinusregel.

③ Opgave

Construeer op de diameter van een halfcirkel een gelijkzijdige driehoek zoals op de figuur.
Een kleinere halfcirkel overspant de rest van deze diameter. Construeer vervolgens de cirkel
ingeschreven in het overblijvende gebied. Bewijs dat de rechte door zijn middelpunt
en het snijpunt tussen driehoek en halfcirkel, loodrecht staat op de diameter.

Opmerking: de driehoek hoeft niet gelijkzijdig te zijn.
Gelijkbenigheid (met basis op de diameter) volstaat.

③ Hint

Los het probleem analytisch op. Druk uit aan welke vergelijkingen de cirkel moet voldoen
om te raken aan zowel de twee halfcirkels als de driehoek, en los dit stelsel op.

④ Opgave

Beschouw in een rechthoekige driehoek de drie cirkels met een zijde als diameter. Deze begrenzen enkele gebieden. Bewijs dat de drie groen gekleurde gebieden samen dezelfde oppervlakte bezitten als het oranje gebied.

---

④ Hint

Label alle tien uitgesneden gebieden en beschrijf de cirkels als een unie van deze gebieden. Ga dan na wat de stelling van Pythagoras leert over de oppervlaktes van de cirkels (en dus ook over de uitgesneden gelabelde gebieden).

---

⑤ Opgave

Begin met een vierkant en diens ingeschreven cirkel. Construeer in de ruimte ertussen twee kleinere cirkels, rakend aan de grote cirkel en twee zijden van het vierkant. Beschouw vervolgens hun raaklijnen door het midden van de overstaande zijde. Deze raaklijnen en een zijde van het oorspronkelijke vierkant definiëren een driehoek.

Zoek het verband tussen de straal van diens ingeschreven cirkel en de ingeschreven cirkel van het vierkant.

---

⑤ Hint

Er bestaat een wonderlijke formule die je hier misschien kunt gebruiken. Noem P de omtrek en A de oppervlakte van een driehoek, en r de straal van z'n ingeschreven cirkel. Dan geldt er steeds dat $rP = 2A$.

---

⑤ Oplossing

De cirkel in het vierkant is net dubbel zo groot als die in de driehoek.

---

⑥ Opgave

In een vierkant zijn twee gelijkzijdige driehoeken ingeschreven. De ene heeft er een zijde mee gemeenschappelijk, de ander een hoekpunt. Deze driehoeken begrenzen enkele gebieden binnen het vierkant: construeer in de aangegeven twee de ingeschreven cirkels, en zoek het verband tussen hun stralen.

---

⑥ Oplossing

De grotere cirkel is net dubbel zo groot als de kleinere.

---

⑥ Hint

Er bestaat een wonderlijke formule die je hier misschien kunt gebruiken.
Noem P de omtrek en A de oppervlakte van een driehoek, en r de straal van z'n ingeschreven cirkel. Dan geldt er steeds dat $rP = 2A$.

⑦ Opgave

Vertrek vanuit een vierkant.
Construeer twee kwartcirkels met hoekpunten van dit vierkant als middelpunt en een halfcirkel op de overstaande zijde, zoals op de figuur.

Zoek de straal van de cirkel ingeschreven in het centrale uitgesneden gebied in functie van de zijdelengte van het vierkant.

⑦ Hint

Beschouw het probleem in een goedgekozen assenstelsel.

⑦ Oplossing

Noem de zijde van het vierkant z en de straal van de cirkel r, dan geldt er dat $z = 6r$.

⑧ Opgave

Twee congruente regelmatige vijfhoeken met een gemeenschappelijke zijde zijn ingeschreven in een cirkel. Knip het uitstekende cirkelsegment af; merk op dat dit géén halfcirkel is. Construeer de ingeschreven cirkels in de afgebakende ruimtes zoals aangegeven op de figuur.

Zoek nu de verhouding tussen de stralen van deze twee cirkels.

⑧ Oplossing

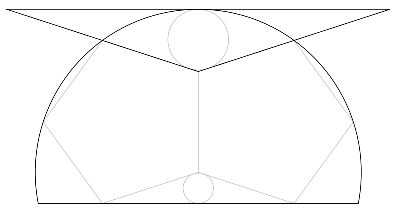
De grotere cirkel is net dubbel zo groot als de kleinere.

⑨ Opgave

De twee in het lichtgroen aangegeven hoeken zijn even groot.
Bewijs dat de zoals op de figuur geconstrueerde driehoeken congruent zijn.

(8) Hint

Verleng de zijden waaraan de bovenste cirkel raakt en laat ze snijden
met de horizontale raaklijn aan de omhullende cirkel, in het bovenste punt.



Bewijs dat de aldus verkregen driehoek gelijkvormig is met die onderaan
(die de kleine cirkel omschrijft) en zoek de gelijkvormigheidsfactor.

---

(9) Hint

Toon eerst aan dat de driehoeken in kwestie gelijkvormig zijn
en bewijs de gelijkheid van een goedgekozen paar overeenkomstige zijden.

---

(10) Opgave

De afmetingen van een rechthoek zijn zodanig gekozen dat de vijf cirkels,
ingeschreven in de aangegeven, door halfcirkels begrensde gebieden,
even groot zijn. Bepaal de verhouding tussen deze afmetingen.

---

(10) Hint

Stel de hoogte van de rechthoek gelijk aan 1, dan heb je slechts één parameter b nodig
(de breedte van de rechthoek). Druk de stralen van de cirkels uit in functie van b.
Herinner je dat de middelpunten en het snijpunt van twee rakende cirkels collineair zijn,
en pas de stelling van Pythagoras toe in enkele goedgekozen driehoeken.

---

(10) Oplossing

Noem de breedte van de rechthoek b en de hoogte h. Er geldt dat $\dfrac{b}{h} = \sqrt{2}$.

---

(11) Oplossing

De lengte van de hypotenusa is gelijk aan $1 + \sqrt{5}$, ofwel 2φ (met φ de gulden verhouding).

11 Opgave

Enkele congruente driehoeken waaieren uit rond een regelmatige vijfhoek met zijden van eenheidslengte. Bepaal de lengte van hun hypotenusa.

Bonuspunten als je er de gulden snede mee in verband brengt!

11 Hint

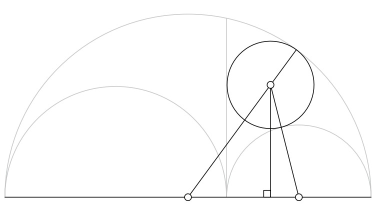
Gebruik dat $\cos 36° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, oftewel $\dfrac{\varphi}{2}$ (met φ de gulden verhouding).

12 Opgave

Verdeel een arbelos (Archimedes' figuur begrensd door drie onderling rakende halfcirkels met een gemeenschappelijke middellijn) in twee, via een loodrechte op deze middellijn doorheen het raakpunt van de twee kleinste halfcirkels. Construeer in beide helften de ingeschreven cirkels, en bewijs - in de voetsporen van Archimedes - dat ze even groot zijn.

12 Hint

Beschouw de rechterhelft. Noem het centrum van de ingeschreven rechtercirkel P, zijn loodrechte projectie op de middellijn Q, het middelpunt van de rechterhalfcirkel M en tot slot het middelpunt van de overspannende halfcirkel N. Gebruik de stelling van Pythagoras in ΔPQM en ΔPQN.



Herleid de straal van de ingeschreven cirkel naar een symmetrische vorm, zodat de ingeschreven linkercirkel wel dezelfde straal moet hebben.

13 Opgave

Construeer op een rechthoekige driehoek twee "maantjes" als op de figuur, begrensd door halfcirkels op de zijden van de driehoek. Bewijs - in de voetsporen van Hippocrates - dat deze twee maantjes samen dezelfde oppervlakte hebben als de originele driehoek.

(13) Hint

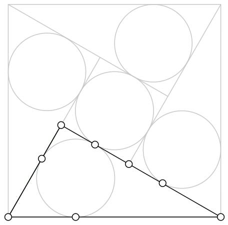
Probeer niet de oppervlakte van de maantjes apart uit te rekenen.

(14) Opgave

Een vierkant wordt zodanig verdeeld in vijf gebieden als op de figuur, dat elk van de ingeschreven driehoeken even groot is. Bepaal de lengte van hun straal in de veronderstelling dat het originele vierkant zijden van eenheidslengte heeft.

(14) Hint

De raakpunten van de cirkels en het snijpunt met de inwendige rechten verdelen de zijden van de rechthoekige driehoeken in drie fundamentele lengtes. Zoek verbanden tussen deze lengtes.



(14) Oplossing

De cirkels hebben een straal van $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.

(15) Opgave

Kies een willekeurig punt binnen een gelijkzijdige driehoek en construeer de loodrechten vanuit dit punt op de zijden. Toon aan dat de som van hun lengten onafhankelijk is van het gekozen punt en bepaal deze constante.

(15) Hint

Verbind het punt met de drie hoekpunten van de driehoek en beschouw z'n oppervlakte op twee verschillende manieren.

15 Oplossing

De afstanden van het punt tot de zijden sommeren tot een constante,
die gelijk is aan de hoogte van de gelijkzijdige driehoek.

---

16 Opgave

Construeer een rechthoekige driehoek met de diameter van een cirkel als basis
en een derde hoekpunt op de cirkel. Schrijf in de drie ruimtes tussen de driehoek en de cirkel
de grootst mogelijke cirkel in. Construeer vervolgens twee nieuwe ingeschreven cirkels aan weerszijden ervan.

Zoek nu het verband tussen hun stralen.

---

16 Hint

Construeer nog een extra cirkel, de ingeschreven cirkel van de driehoek,
en ga na of je de oplossing van Sangaku 15 niet kunt gebruiken.

---

16 Oplossing

Noem de stralen van deze cirkels op de rechthoekszijden a en b, en de straal van die op de hypotenusa c.
Er geldt eenvoudigweg dat $a + b = c$.

---

17 Opgave

Construeer binnen een rechthoekige driehoek drie vierkanten en drie ingeschreven cirkels
zoals aangegeven op de figuur. Zoek het verband tussen de stralen van de cirkels.

---

17 Hint

Nogal wat componenten zijn gelijkvormig.

---

17 Oplossing

Noem de stralen r_1, r_2 en r_3, respectievelijk van grootste naar kleinste straal:

$$r_2^2 = r_1 \cdot r_3$$

---

(18) Opgave

De middelpunten van n congruente, rakende cirkels bepalen een regelmatige n-hoek. Zoek het verband tussen de ringen, begrensd door de cirkel door deze middelpunten en de cirkel ingeschreven binnen de n-hoek. Op de figuur staan de gevallen $n = 3, 4, 5, 6$.

(18) Hint

Kun je bewijzen dat de oppervlakte van een ring bepaald wordt door de lengte van een koorde rakend aan de binnencirkel? De stralen van binnen- en buitencirkel spelen dan geen rol meer.

(18) Oplossing

De ringen hebben allen dezelfde oppervlakte, ongeacht de waarde van n.

(19) Opgave

Leg een aantal congruente cirkels in een gesloten keten tegen elkaar. Hun middelpunten bepalen een veelhoek, die de cirkels verdeelt in binnen- en buitensectoren. Bewijs dat de buitensectoren dezelfde oppervlakte hebben als de binnensectoren samen plus twee extra cirkels met dezelfde straal.

(19) Hint

Herinner je de hoekensom in een willekeurige n-hoek: samen $(n-2)\pi$ radialen.

(20) Opgave

Begin met een willekeurige vierhoek en plak op elk van diens zijden een vierkant. Bewijs dat de verbindingslijnen tussen middelpunten van tegenoverstaande vierkanten steeds even lang zijn en loodrecht op elkaar staan.

(20) Hint

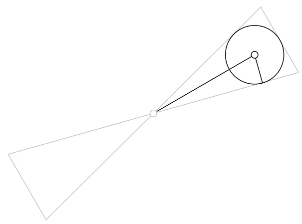
Vectoren zijn hier handig.

21 Opgave

Construeer een diabolofiguur als volgt. Aan de basis ligt een vierkant en langs de lange zijde passen net $2n$ even grote vierkanten ($n = 2$ op de tekening). Hoeveel ingeschreven cirkels passen er dan in zo'n diabolo, in functie van n?

21 Hint

Trek vanuit het middelpunt van de buitenste ingeschreven cirkel een loodrechte op de lange zijde van de diabolo en zoek naar gelijkvormige driehoeken.



21 Oplossing

Er passen juist $2n + 1$ ingeschreven cirkels op de middellijn van de diabolo.

22 Opgave

Beschouw een willekeurige triangulatie van een koordenveelhoek. Construeer in elk van de driehoeken de ingeschreven cirkel. Bewijs nu dat de som van hun stralen een constante is, onafhankelijk van de gekozen triangulatie.

22 Hint

Zoek de stelling van Carnot eens op.

23 Opgave

Vouw een hoekpunt van een vierkant blad naar een willekeurig punt op een tegenoverliggende zijde. Door het vouwen wordt één zijde volledig verplaatst en steekt deze ietsje uit boven het vierkant, over een afstand d. Beschouw nu de ingeschreven cirkel in de driehoek begrensd door deze zijde en het originele vierkant. Bewijs dat de straal van deze cirkel gelijk is aan d.

In de figuur is de afstand d aangeduid als de straal van een cirkel met het uitstekende hoekpunt als middelpunt.

(23) Hint

Zoek eerst een algemene formule voor de straal van de ingeschreven cirkel in een rechthoekige driehoek, in functie van de lengtes van de drie zijden.

(24) Opgave

Kies een willekeurig punt binnen een regelmatige negenhoek en verbind het met de hoekpunten. Kleur de aldus bepaalde driehoeken afwisselend in met drie kleuren.

(24) Hint

Verleng de zijden van de negenhoek met dezelfde kleur tot een gelijkzijdige driehoek, en kijk even of je de oplossing van Sangaku 15 niet kunt gebruiken.

(24) Oplossing

De gebieden met dezelfde kleur zijn samen even groot.

(25) Opgave

Beschouw een rechthoekige driehoek ingeschreven in een halfcirkel. Construeer in deze driehoek en in de twee tussenliggende cirkelsegmenten de ingeschreven cirkel, en zoek het verband tussen hun stralen.

(25) Hint

Trek vanuit het middelpunt van de halfcirkel de rechten evenwijdig met de rechthoekszijden. Zoek verschillende verbanden tussen de stralen en de zijden van de driehoek, en elimineer dan de overbodige parameters tot enkel de stralen overblijven.

(25) Oplossing

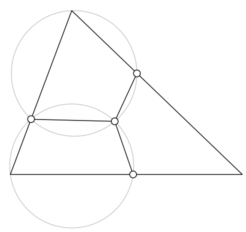
Noem de straal van de grote cirkel R en die van de twee cirkels in de segmenten r_1 en r_2. Er geldt dan dat $R^2 = 8r_1r_2$.

26 Opgave

Kies drie willekeurige punten op de zijden van een driehoek en teken de cirkels doorheen één hoekpunt van de driehoek en de twee gekozen punten op de aanliggende zijden. Bewijs dat deze drie cirkels een uniek punt M gemeenschappelijk hebben.

26 Hint

Kies twee cirkels en verbind de vier relevante punten erop tot een cyclische vierhoek. Verzamel informatie omtrent de groottes van de hoeken rondom M en bewijs dat de overige vierhoek eveneens cyclisch is.



27 Opgave

Vertrek vanuit een willekeurige driehoek en verdeel elke hoek ervan in drieën. Laat adjacente paren van deze“trisectrices” snijden en verbind de drie snijpunten tot een driehoek. Bewijs dat deze driehoek steeds gelijkzijdig is.

27 Hint

De meest straightforward methode is aan te tonen dat een zijde van Morleys driehoek gelijk is aan $8\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)$, een uitdrukking die symmetrisch is in α, β en γ. Probeer dit te vinden door middel van (heel wat) goniometrie.