Oplossing Breinbreker april-mei 2023

We moeten een minimale m vinden zodat elke deelverzameling van $\{1, 2 \ldots 2023\}$ van grootte m altijd een macht van 2 bevat of 2 getallen, waarvan de som een macht van 2 is, bevat.

We zoeken een zo maximale deelverzameling waar geen machten van 2 inzitten en zodat de som van 2 getallen van die verzameling nooit een macht van 2 is. Dan is m juist de grootte van die deelverzameling plus 1.

De kleinste macht van 2 groter dan 2023 is $2048 = 2023 + 25 = 2022 + 26 = \cdots = 1025 + 1023$. Op die manier hebben we 999 paren getallen gevormd die niet samen mogen voorkomen: $\{2023, 25\}$, $\{2022, 26\} \ldots \{1025, 1023\}$.

We doen dit nog eens voor de getallen kleiner dan 25: $32 = 24 + 8 = 23 + 9 = \cdots = 17 + 15$. We krijgen nog 8 extra paren van getallen die niet samen mogen voorkomen.

We doen dit nog een laatste keer voor getallen kleiner dan 8: $8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3$ en we krijgen nog 3 extra paren.

Samen hebben we dus een verzameling van 1010 paren van getallen die niet samen mogen voorkomen. We noemen deze verzameling S. Per constructie zit een getal maar in hoogstens 1 zo'n paar en de enige getallen die in geen enkel paar voorkomen zijn 4, 16 en 1024 wat allemaal machten van 2 zijn.

De maximale deelverzameling die we zoeken heeft hoogstens grootte 1010. Anders zou er een paar in S bestaan waarvan beide getallen tot die maximale deelverzameling behoren wegens het duivenhokprincipe, maar dat kan niet aangezien hun som een macht van 2 is. Anderzijds is de verzameling $\{5, 6, 7, 17, 18, \ldots, 23, 24, 1025, 1026, \ldots, 2022, 2023\}$ een verzameling van orde 1010 zonder machten van 2 en waarvan de som van 2 willekeurige elementen nooit een macht is van 2. Dat is dus de maximale deelverzameling die we zoeken en m is dus 1011.

Dit betekent dat het maximum aantal zetten zonder dat er iemand verliest gelijk is aan 1010. De persoon die de 1011e zet doet verliest en dat is dus Alice.